Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

2015

Sylva Peclinovská

Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Činnost kolektivu třídy při poznávání matematiky

(Studie o edukačním stylu VOBS)

Activities of a class when discovering mathematics

(A study on the educational style of Scheme-oriented education)

Sylva Peclinovská

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.

Studijní program: Pedagogika

Studijní obor: Didaktika matematiky

2015

Prohlašuji, že jsem disertační práci na téma Činnost kolektivu třídy při poznávání matematiky vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 18. 12. 2015

....

podpis

Velmi děkuji svému školiteli, prof. RNDr. Milanu Hejnému, CSc., za vstřícnost, věnovaný čas, připomínky a cenné rady nejen pro zpracování práce, ale i pro praxi. Nemalý dík za velkou podporu patří i mé rodině.

ABSTRAKT

Práce pojednává o kvalitativním výzkumu. Cílem výzkumu je na konkrétním příkladu řešení problému sudosti nuly poznávat objevitelský proces třídy z hlediska jednotlivců, skupin i celého kolektivu v rozvinuté třídní diskuzi. Jádrem výzkumu jsou dva pořízené záznamy na sebe navazujících diskuzí, které proběhly v časovém odstupu přibližně jednoho měsíce a které se odehrály v jedné třídě ve 4. ročníku na 1. stupni základní školy vyučovaném konstruktivisticky. Uvedená výzkumná databáze je doplňována písemnými pracemi sledovaných žáků, audiozáznamy, videozáznamy a pedagogickým deníkem autorky vedeným po dobu čtyř let. Dále jsou využívány jak osobní zkušenosti autorky, tak převzaté zkušenosti z odborné literatury.

Výchozí metodologická pozice je dána klasifikací širokého spektra žákovských výpovědí a myšlenek týkajících se sudosti nuly a jevů příbuzných. Některé komentované jevy jsou doplňovány doporučeními a návrhy úloh jak vzniklé didaktické situace řešit, nebo případně porovnávány s hypotetickými situacemi typickými pro transmisivně vedené vyučování.

Hlavní výsledky práce se týkají oblasti kognitivní, metakognitivní a sociální a jsou shrnuty do sedmnácti bodů uvedených v závěru práce, které poukazují na význam diskuze např. pro komplexitu poznání žáků, obohacování a zpřesňování myšlenek žáka, růst autonomie a schopnost spolupráce.

KLÍČOVÁ SLOVA

výuka orientovaná na budování schémat (VOBS), diskuze žáků ve třídě, vývoj poznání žáka i třídy, kognitivní problém nuly, analýza argumentace žáka, desémantizace

ABSTRACT

The dissertation describes qualitative research undertaken to study the discovery process in a class at the individual, group and whole class levels. This process is demonstrated on the case of discovering the parity of number zero (odd or even) in two class discussions. These discussions took place in a class of fourth year pupils at primary school, taught by the author in a constructivist way, within a one month period of each other. The research database contains also audio and video recordings, written work of the observed pupils, the author's teaching diary and it is analyzed and compared with literature.

The methodology focuses on classifying the broad spectrum of pupils' responses and thinking processes not only in relation to the selected problem but also to related problems. Some of the described events are commented on with recommendations how to handle the didactic situations that occurred or compared with hypothetical situations typical for transmissive teaching.

The main results of this work fall in the cognitive, metacognitive and social area are summarized into seventeen points that highlight the importance of discussion for the complexity of pupils' knowledge, for the enriching and refining their ideas, increasing their autonomy and ability to cooperate.

KEYWORDS

Scheme - oriented education (SOE), pupil discussion, discovery process of pupil and class, cognitive problems related to the concept of zero, analysis of pupil argumentation, desemantization

Obsah

1. Úvod

Práce je zaměřena na výuku matematiky u žáků na 1. stupni ZŠ a vychází z osobních zkušeností autorky získávaných během praxí v rámci magisterského studia na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovi v Praze a především pak ze zkušeností nabytých během čtyř let jejího působení v roli učitelky na 1. stupni ZŠ po ukončení magisterského studia.

1.1. Zdůvodnění výběru tématu

Během své školní docházky i studií jsem poznala řadu edukačních přístupů učitelů, od těch, kteří nám dávali prostor říci svůj názor a nad učivem přemýšlet, až po ty, kteří jen učivo diktovali a diskuzi neumožňovali. Zprvu jsem tyto odlišnosti zažívaných vyučovacích hodin připisovala pouze různým povahám učitelů, jestli jsou mi sympatičtí, nebo nejsou. Později jsem si ale začínala uvědomovat, že to, jak se při výuce cítím, je ovlivněno především způsobem vedení hodiny daného učitele. Začala jsem si tedy všímat souvislostí mezi tím, jak učitel ve třídě působí, a tím, jak se při jeho výuce žák cítí. Postupem času, především po zahájení studia na pedagogické fakultě, jsem si proto začala pokládat otázku, jak to udělat, aby se žáci při mé výuce cítili dobře a zároveň aby učení bylo pro ně efektivní a smysluplné.

Při hledání odpovědi mě oslovily konstruktivistické přístupy k výuce, se kterými jsem se seznámila v rámci didaktik jednotlivých předmětů naší budoucí praxe. Inspirativní se při tom pro mě stala především metoda VOBS (viz kap. 2) pro výuku matematiky spolu s programem RWCT[1] pro český jazyk. Některé prvky technologie práce učitele těchto dvou přístupů se mi navíc jevily jako dobře přenositelné i do dalších předmětů. Vzhledem k zaměření této práce na výuku matematiky je však dále pozornost soustředěna pouze na VOBS.

[1] Zkratka RWCT pochází z anglického označení programu Reading and Writing for Critical Thinking (tedy Čtením a psaním ke kritickému myšlení). Jak již samotný název programu napovídá, důraz je kladen především na učení se kritickému posuzování získávaných informací ve spolupráci s ostatními (více viz Tomková, 2007).

Výuku orientovanou na budování schémat (VOBS) jsem měla šanci zažít i v roli žáka (studenta). Prožila jsem tak radost z objevování matematických zákonitostí a z jeho sdílení s ostatními. Největším překvapením však pro mě bylo odhalení mezer ve svých znalostech i tam, kde jsem měla pocit, že látce dobře rozumím vzhledem ke složené maturitní zkoušce. Uvědomila jsem si také, že řešením předkládaných problémových úloh a možností sledovat úspěšné, ale i neúspěšné řešitelské pokusy dalších studentů se mé dosavadní znalosti, které se často ukazovaly jako povrchní, mnohem více prohlubují. Způsob vedení výuky podle VOBS se proto pro mě stal metou, které jsem se chtěla pokusit dosáhnout ve své budoucí učitelské praxi.

Už při magisterském studiu jsem se tedy začala zajímat o to, jakým způsobem žák v matematice o určitém problému přemýšlí. Příležitostně jsem měla možnost setkávat se s žáky různého věku, a tak jsem pořizovala videozáznamy zachycující, jak žáci řeší mnou připravené různé slovní úlohy, a učila se je analyzovat. Některé z těchto nasbíraných materiálů poté vyústilo k sepsání diplomové práce (Chaloupková, 2009). Při mých prvních experimentech jsem vždy sledovala pouze jednoho žáka a snažila se s ním vést rozhovor, který by mi umožnil co možná nejvíce nahlédnout do jeho myšlenkových procesů. Při analýzách jsem však byla vždy odkázána na ochotu žáka o svých úvahách mluvit nahlas.

Když jsem po ukončení magisterského studia začala učit, uvědomila jsem si, že nyní je pro mě téměř nemožné při výuce ještě sledovat způsoby uvažovaní jednotlivých žáků, ale na druhou stranu se jen posloucháním diskuze mezi žáky dozvídám o jejich myšlení daleko více, než když jsem si pouze s jedním povídala. Důvodem je strategie řízení rozhovoru. V dialogu mezi mnou a žákem byl rozhovor řízen mými otázkami, zatímco v rozhovorech mezi žáky vychází řízení od nich. Z hlediska poznávání myšlenkových procesů je tedy tento druhý typ autentičtější a věrohodnější. Jako problém se však ukázala evidence myšlenek, které ve třídě zazněly. Snahou dle zásad VOBS nechávat žáky samostatně diskutovat, jsem ale získávala prostor pro udělání alespoň pár rychlých poznámek. Přitom jsem tak nejednou dospěla ke zjištění, že čím méně do diskuze žáků zasahuji, tím více je pro obě strany přínosnější.

Hlavním důvodem pro vstup do doktorského studia byla zprvu potřeba dále si prohlubovat své znalosti z didaktiky matematiky paralelně se sledováním své praxe. Od prvních svých učitelských kroků jsem tak oproti jiným svým kolegům cítila obrovskou výhodu v možnosti konzultovat své postřehy i nezdary s odborníky a učiteli, kteří stejně jako já chtěli sdílet své zážitky a zkušenosti z hodin. Zároveň jsem také dostala příležitost zúčastnit se několika Letních škol pro učitele matematiky určených pro již stávající učitele a seznamujících je s metodou VOBS. Při setkávání s jinými mnohem zkušenějšími učiteli mě však velice překvapovalo, že ne všichni jsou z metody VOBS tak nadšeni jako já a někteří dokonce vyslovují řadu obav nad její efektivností. Nejčastější obavou, která zaznívala, bylo, že žáci přeci nemohou zvládnout sami objevovat matematické pojmy, vztahy a zákonitosti. Já jsem byla ale o funkčnosti metody přesvědčená, jelikož jsem její účinnost zažila sama na sobě.

A to byl vlastně i první podnět k zahájení výzkumu. Rozhodla jsem se začít podrobně zkoumat svou výuku. Začít reflektovat svou práci začínajícího učitele, zda učím skutečně tak, jak jsem si předsevzala, tedy podle zásad VOBS. A zároveň i zkoumat žáky, jestli je má výuka pro ně skutečně tak přínosná, jak se domnívám, a jestli žáci matematiku skutečně objevují. Jestli tedy to, že nesdílím obavy jiných učitelů, není dáno pouze nedostatkem mých zkušeností a nekritickým pohledem na VOBS.

1.2. Cíle výzkumu

K upřesňování cílů výzkumu docházelo postupně v průběhu získávání dat a jejich následného analyzování.

Původním cílem výzkumu bylo sledovat kognitivní a postojové charakteristiky žáků v matematice v rámci edukačního stylu VOBS. Natočeno bylo 31 videozáznamů a 9 audiozáznamů hodin matematiky a několik zajímavých bylo zanalyzováno v duchu prvotního cíle. Ukázalo se však, že rozsah této práce bude nezvládnutelný. Bylo tedy nutné cíl zúžit. Rozhodla jsem se proto soustředit se jen na sledování formování generických modelů při poznávání žáků, především tedy jejich vznik z modelů izolovaných (o izolovaných a generických modelech dále viz v části 2.3.1.).

Snažila jsem se odhalovat hloubku myšlenek žáka z hlediska matematického poznání, jejich vývoje a bohatosti. Detailnějším zkoumáním myšlenek žáků jsem si čím dál více všímala jejich vzájemné provázanosti. Dalším zpřesněním cíle bylo tedy sledování postupného utváření poznání žáků nejen izolovaně, ale i v souvislosti s působením kolektivu třídy. Přitom bylo zajímavé sledovat, jak diskuze několika žáků ovlivňuje i žáky další, kteří se přímo do diskuze nezapojují. Je přirozené, že jsem zároveň evidovala, místy analyzovala a hodnotila také své vlastní jednání (jednání učitelky). Důsledkem těchto úvah bylo kritické zhodnocení mého působení ve třídě s poznáním účinnějších edukačních postupů.

I tento cíl se ale posléze ukázal rozsahem pro zpracování příliš široký, a tak další zúžení se omezilo na pouze dva záznamy vyučovacích hodin a jedinou hlubokou myšlenku týkající se problému, zda je nula sudé číslo. Hloubka této myšlenky spočívá v didakticky náročném pojmu nula.

Po tomto omezení byl cíl výzkumu formulován následovně:

Utváření poznání žáka i dění ve třídě při vzájemné diskuzi v rámci vyučovacích hodin matematiky vedených konstruktivisticky.

Finální cíl se záměrně nezmiňuje o obsahu, tj. o sudosti nuly, protože snahou je dobrat se obecných zákonitostí, které přesahují tento konkrétní didaktický obsah.

Primární zaměření výzkumu je tedy naformulováno pomocí tří následujících výzkumných otázek.

Výzkumné otázky

1. *Jak třída dospívá k objevení matematického pojmu a vztahu?*
2. *Jak v rámci třídní diskuse probíhá rozvoj matematických zkušeností, znalostí a schopností žáka?*
3. *Jaké sociální jevy provází popsaný proces rozvinuté třídní diskuze?*

1.3. Volba výzkumné strategie

Jedná se o kvalitativní výzkum, protože cílem není zjišťování frekvence jednotlivých jevů v poznávacím procesu žáků, ale jejich odhalování a popis. Jak uvádí Gavora (2010), kvalitativní výzkum umožnuje hlubší poznání zkoumaného jevu. Z hlediska délky trvání jde o výzkum longitudinální, protože je činnost vybrané třídy sledována po dobu čtyř let.

Zkoumání má povahu akčního výzkumu. Průcha, Mareš a Walterová akční výzkum definují jako „druh pedagogického výzkumu, jehož účelem je přímo ovlivňovat či zlepšovat určitou část vzdělávací praxe.“(Průcha, Mareš, Walterová, 2013, s. 15) Podle Nezvalové (2003) je pak důležitým úkolem akčního výzkumu kromě zkvalitnění praxe také přispění k rozvoji pedagogické teorie.

Jak ale uvádí Janík (2004), akční výzkum si neklade za cíl vytváření obecně platného poznání, ale spíše jde o získání konkrétních poznatků o konkrétním problému a následné hledání jejich řešení. Akční výzkum se tedy zabývá reálnou školní situací, přičemž středem jeho zájmu jsou žáci i učitelé. Jak dále zmiňuje také Jaworski (1998), při akčním výzkumu učitel zastává dvojí roli, jak roli učitele, tak i výzkumníka.

Tuto dvojroli zastávám ve výzkumu také já. Jsem tedy zároveň zkoumaným subjektem, ale i výzkumníkem. Je tedy pochopitelné, že výsledky výzkumu jsou „zatíženy“ jistým subjektivismem. Jako učitelka mám s žáky mnoho citových vazeb, zážitků i zkušeností. Na druhé straně ale právě tyto vazby umožňují poznávat žáky komplexně jako osobnosti, tedy sledovat jejich kognitivní a metakognitivní rozvoj v souvislosti s jejich sociálními a emotivními danostmi.

Přesto jsem se ale snažila pro zvýšení objektivity svých názorů analýzy provádět opakovaně, a to i s delším časovým odstupem se snahou o co nejkritičtější náhled na danou situaci a především pak porovnávat své interpretace s literaturou, bohatými zkušenostmi svého školitele či případně s názory jiných učitelů. Dospět k co možná nejvíce realistickému obrazu myšlení žáka jsem se tak snažila konfrontací subjektivních pohledů dalších lidí.

1.4. Databáze výzkumu a okolnosti sběru dat

Databáze je tvořena materiály dvojího typu:

1. Osobní materiály

Základ databáze tvoří osobní materiály, které jsem sbírala v průběhu čtyř let, kdy jsem učila na 1. stupni základní školy. Tyto materiály se týkají jedné třídy, kterou jsem učila od 2. do 5. ročníku ZŠ v letech 2009 až 2013 ihned po ukončení magisterského studia.

Výhodu této části databáze spatřuji v získání pestré palety materiálů vztahující se k jedné třídě během delšího časového období. Být součástí této třídy mi též umožnilo sledovat i okolnosti vzniku těchto materiálů, a to i ty, které přesahovaly rámec výuky. Nevýhodou však bylo, že jsem současně zastávala dvě role, učitele a výzkumníka. Přičemž role učitele musela být vždy s ohledem na žáky prioritní. Zabývání se sběrem dat současně s přípravami i realizací výuky tak občas bylo nad rámec mých možností, a to obzvláště v počátcích výzkumu, kdy jsem zároveň řešila obtíže začínajícího učitele.

<u>Žáci[2] ve sledované třídě</u>

Vzhledem k tomu, že se sběr dat týká delšího období, došlo k malým změnám v třídním kolektivu. Ve druhém pololetí 2. ročníku odešel na jinou školu Tonda. Na začátku 3. ročníku přibyla do naší třídy Klára a na začátku 4. ročníku přistoupil ještě Petr. Složení žáků v jednotlivých ročnících ukazuje tabulka 1.

Školní rok	Ročník	Počet žáků (dívek / chlapců)
2009 / 2010	2.	1. pololetí: 15 (6 / 9)
		2. pololetí: 14 (6 / 8)
2010 / 2011	3.	15 (7 / 8)
2011 / 2012	4.	16 (7 / 9)
2012 / 2013	5.	16 (7 / 9)

Tabulka 1: Přehled počtu a složení žáků v jednotlivých ročnících sběru dat

[2] Jména žáků uváděná v práci jsou smyšlená, ale zastupují konkrétní žáky. Pokud se tedy průběžně v textu bude objevovat např. žák Vojta, půjde o téhož žáka.

Počet odučených hodin ve třídě

Ke změnám došlo i v počtu hodin, které jsem v této třídě odučila (viz tab. 2). I když se počet hodin strávených v mé třídě ve 4. a 5. ročníku snížil, po celou dobu jsem však zde byla třídním učitelem a vedla hodiny matematiky, z nichž jsou materiály pro databázi sbírány.

Příčinou, proč se mi snižoval čas v mé třídě, byla potřeba vedení školy pokrýt nedostatek dalších učitelů anglického jazyka, který se na škole vyučoval od prvního ročníku, a učitelů informatiky, která se na naší škole začala vyučovat ve školním roce 2011/ 2012 od 5. ročníku.

Školní rok	Ročník	Počty odučených hodin ve zkoumané třídě / celkový počet hodin (za týden)
2009 / 2010	2.	21 / 22
2010 / 2011	3.	23 / 24
2011 / 2012	4.	18 / 24
2012 / 2013	5.	17 /27

Tabulka 2: Počet odučených hodin v jednotlivých ročnících zkoumané třídy

Část databáze vycházející z osobních materiálů je tvořena:

videozáznamy hodin matematiky

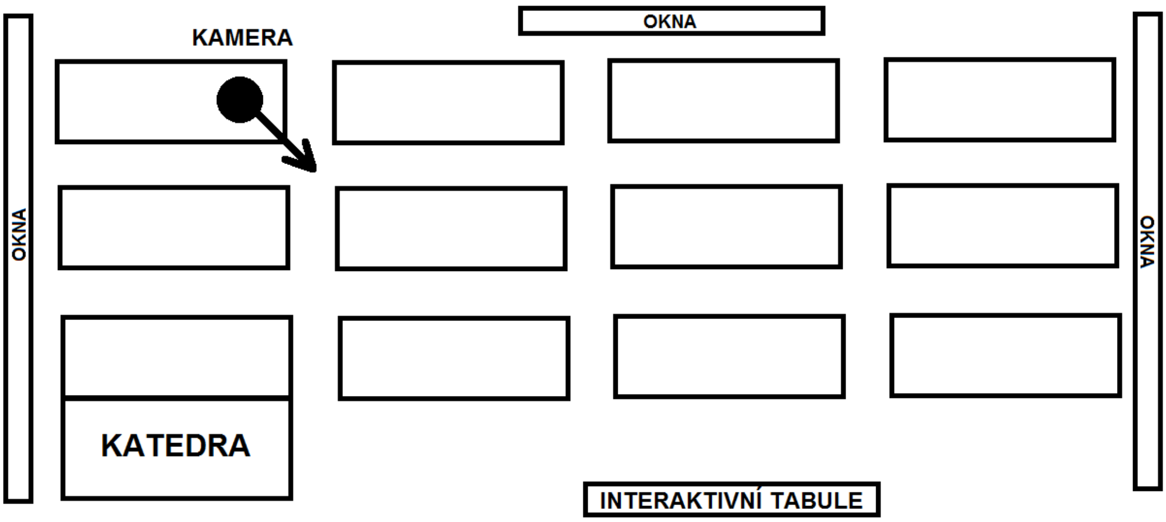
Ve sledované třídě bylo celkem sesbíráno 31 videozáznamů. Jejich postupné získávání shrnuje následující tabulka (viz tab. 3).

Rok	Ročník	Počet videozáznamů
2009	2.	-
2010	2.	1
2010	3.	1
2011	3.	2
2011	4.	3
2012	4.	8
2012	5.	6
2013	5.	10

Tabulka 3: Přehled sběru videozáznamů v jednotlivých letech

Pořizování videozáznamů bylo zprvu ovlivněno nedostatečným technickým vybavením. První videozáznamy jsem pořizovala tak, že jsem v ruce držela kameru a zároveň učila. Takto jsem sice velice rychle mohla kameru přemisťovat podle potřeby po třídě, avšak hned při prvních analýzách se ukázalo, že kamera zachycuje pouze to, co zrovna sleduje učitel. Pro výzkum jsou ale často přínosnější právě ty momenty, které zůstávají mimo pozornost učitele. Koupila jsem si tedy stativ a pořizováním dalších videozáznamů z hodin jsem hledala nejvhodnější místo pro její umístění.

Jako nejlepší varianta se ukázalo postavení kamery na stativu v rohu třídy tak, aby zabírala co největší počet žáků a zároveň bylo možné sledovat i dění u tabule (viz obr. 1). V těchto záznamech sice nejsou najednou vidět všichni žáci a není jim vidět do obličeje, na druhou stranu však žákům kamera nepřekážela v pohybu a ze záznamu bylo možné sledovat většinu dění v lavicích i u tabule. Jiné umístění kamery navíc komplikovalo uspořádání třídy, především okna, která způsobovala velmi tmavý obraz.



Obrázek 1: Schéma třídy ve 4. ročníku, ze kterého pocházejí ústřední materiály výzkumu. Šipka naznačuje umístění a směr natočení videokamery.

Kromě technických překážek jsem se potýkala s tím, že jsem většinu záznamů musela pořizovat sama. Často bylo pro mě velice náročné ovládat kameru a zároveň vnímat diskuzi žáků a promýšlet další edukační kroky. Přesto se však tyto záznamy nakonec ukázaly pro práci lepší, než když nás přišla natáčet další osoba. Žáci a i já v hodinách, které jsem natáčela sama, působili mnohem přirozeněji a i diskuze se mnohem více rozvíjely. Nepomohlo ani, když nás v 5. ročníku chodila opakovaně filmovat studentka z pedagogické fakulty, která si u nás plnila praxi. Příčinou zde mohlo být i to, že jsem z přítomnosti další dospělé osoby ve výuce nesvá, cítím se nepohodlně a žáci to vycítí.

Protokol diskuze z jednoho z pořízených videozáznamů je uveden v příloze práce (viz Příloha 2) a jeho analýzy patří k hlavním zdrojům práce. Odkazy v textu na tento materiál jsou pod zkratkou DII. Jak ukazuje tab. 4, přímo v práci je využita epizoda ještě i z dalšího videozáznamu.

Datum	Ročník	Popis	Odkaz v textu na daný materiál
7. 3. 2012	4.	Zahájení diskuze – Může mít trojúhelník dva pravé úhly?	-
24. 4. 2012	4.	Druhá diskuze o sudosti nuly	**DII**

Tabulka 4: Videozáznamy použité přímo v práci

audiozáznamy hodin matematiky

Jelikož nebylo možné mít kameru neustále nainstalovánu ve třídě, pořídila jsem si diktafon, abych alespoň pomocí audia mohla případně zachytit zajímavou diskuzi. Audiozáznam jsem tedy pořizovala v okamžicích, kdy jsem neměla připravenu kameru, a přesto jsem měla pocit, že to, co se ve třídě odehrává, by bylo dobré zaznamenat. Bohužel následné analýzy těchto záznamů bylo velmi obtížné realizovat, protože mnoho vstupů zanikalo v šumu třídy a vstupy žáků sedících daleko od diktafonu často nebylo vůbec možné rozlišit. Pořizování audiozáznamů jsem tedy považovala pro sběr dat spíše jako druhotné. Přesto však jeden z celkového počtu 9 audiozáznamů se stal výchozím pro výzkum a jeho protokol je uveden v příloze práce.

V tabulce 5 je uveden v práci využívaný audiozáznam a i způsob odkazování v textu (DI) na jeho protokol.

Datum	Ročník	Popis	Odkaz v textu na daný materiál
27. 3. 2012	4.	První diskuze o sudosti nuly	**DI**

Tabulka 5: Audiozáznam použitý v práci

pedagogický deník

Databáze je doplněna též o zápisy z pedagogického deníku sledované výuky matematiky, tedy především o poznámky z hodin vyjadřující se k učivu, problematickým a zajímavým situacím, i k dalším jevům objevujícím se ve třídě.

Takovýchto poznámek vzniklo v průběhu sběru dat velké množství. Bohužel ne všechny jsou využitelné. Musela jsem se nejprve naučit jak si udělat rychle poznámku a dobře ji archivovat pro možné další použití. Málokdy jsem ale měla čas doplňovat své poznámky vzniklé při hodině nebo ihned po vyučování. Jako přínosné se mi tedy ukázalo opatřit je proto alespoň datem jejich získání, odpovídající stránkou v učebnici jako odkazu k probíranému tématu, fotografiemi záznamů na tabuli nebo uložením ploch z interaktivní tabule.

Datum	Ročník	Popis
11. 11. 2009	2.	Zachycení radosti Šimona ze schopnosti vyřešit úlohu, na kterou rodič nestačil
Prosinec 2009	2.	Hledání různých řešení doplnění součtového trojúhelníku
Leden 2010	2.	Dohoda třídy určovat sudost čísla podle možnosti rozložit jej na součet dvou stejných čísel
Květen 2010	2.	Počátky práce s úlohami, které nemají žádné řešení – prostředí Parkety
8. 10. 2010	3.	Vzkaz maminky Andreji přiložený k domácímu úkolu
27. 3. 2012	4.	Poznámky k diskuzi DI
27. 3. 2012	4.	Zachycení útržku rozhovoru žáků ve školní jídelně k problému řešenému při vyučování
2. 4. 2012	4.	Žádost Amálky o další diskutování problému nuly a informace o řešení problému s rodinou
24. 4. 2012	4	Poznámky k diskuzi DII

Tabulka 6: Přehled použitých záznamů z pedagogického deníku

písemné práce žáků

Po celou dobu působení ve třídě jsem sbírala a archivovala některé písemné práce žáků. Především šlo o práce, které přinášely nové myšlenky, zajímavé způsoby řešení, názory k řešeným problémům nebo se v nich objevovaly typické chyby. Tyto práce vznikaly během vyučování i po něm jako reakce na to, co v hodině probíhalo nebo v rámci speciálně zadávaných dobrovolných úloh.

Datum	Ročník	Autor	Popis
Prosinec 2009	2.	Šimon	Doplnění součtového trojúhelníku a počátky užívání zlomku jedna polovina
Květen 2010	2.	Luboš	Návrh na úpravu zadání úlohy, aby měla řešení
9. 4. 2012	4.	Martina	Písemný záznam argumentů pro sudost nuly vzniklý jako reakce na DI
24. 4. 2012	4.	Ondra	Text o významu nuly v reakci na DII

Tabulka 7: Přehled v textu použitých prací žáků

2. Další materiály

Korespondence s dalšími učiteli

Prostřednictvím e-mailové korespondence jsem oslovila několik učitelek, s nimiž jsem se seznámila především během školení pro učitele matematiky a o nichž jsem věděla, že se stejně jako já snaží učit podle metody VOBS. Zajímalo mě, jak byl v jejich třídách řešen problém sudosti nuly a jestli se i jinde objevil termín sudoliché číslo.

Z počtu 12 oslovených učitelek jsem odpověď obdržela od 8 z nich. V práci je však uvedeno jen 6 odpovědí, protože zbylé dvě paní učitelky si na řešení sudosti nuly v jejich třídě nevzpomněly.

Experiment z dalšího zdroje

Přímo v práci byl použit experiment mé bývalé kolegyně ze školy, která na mou prosbu v únoru 2015 uskutečnila i zaznamenala rozhovor se svou dcerou Elou.

Archiv Milana Hejného

V práci jsou též citovány tři materiály pocházející z bohatého archivu výzkumů, experimentů, vlastních pozorování i poznámek dalších učitelů, zážitků a zkušeností M. Hejného.

Ročník	Popis
3. ročník	Použití pojmu sudolichý v souvislosti s obsahem polymina
8. ročník	Hledání řešení úlohy, zda bod daných souřadnic leží na zadané přímce
8. ročník	Problémy žáků s vypočítáním objemu krychle z vyznačené přední stěny

1.5. Procesy analýzy

Při sbírání materiálů zachycujících proces objevování v matematice se mi podařilo zaznamenat v mé třídě dvě na sebe navazující diskuze žáků, které proběhly přibližně s měsíčním odstupem. Výchozím podnětem první diskuze byla otázka, zda je nula sudá. A protože z první diskuze zůstala tato otázka otevřená, žáci se k ní sami vrátili ve druhé diskuzi. Podrobná analýza těchto dvou diskuzí (dále v textu označovaných jako DI a DII) se stala jádrem celé práce.

Ze záznamů obou diskuzí (DI a DII) jsem nejprve vytvořila protokoly a ty jsem poté doplňovala svými vzpomínkami, postřehy a poznámkami z pedagogického deníku. Poté došlo k provedení prvních analýz s cílem porozumět myšlenkám, které ve třídě zazněly, sledovat myšlenkový proces ve vstupech jednotlivých žáků a na druhé straně pak i analyzovat činnost učitele. Mnohé z těchto analýzy byly ještě dále mnohokrát obohacovány a prohlubovány na základě dvou zdrojů. Prvním zdrojem byl opakovaný návrat k již provedeným analýzám, který umožňoval odhalovat nové skutečnosti (např. při analýze jednoho žáka, jsem si uvědomila, že to samé se vyskytlo už i u jiného žáka, kde jsem to však přehlédla). K odhalování dalších souvislostí pak přispělo i samotné zpracovávání práce. Druhým neméně významným impulsem bylo studium literatury a především pak konzultace se školitelem, díky nimž vyvstávaly další série otázek, na které bylo potřeba hledat odpověď. Postupně tak došlo k vykrystalizování několika témat, které se staly základem kapitol práce. V jednotlivých kapitolách se snažím věnovat určitému jevu do jisté míry izolovaně od ostatních, i když to vzhledem k jejich úzké provázanosti není vždy zcela možné.

Vstupy žáků byly analyzovány především pomocí metody atomární analýzy (Stehlíková, 2000), přičemž zkoumání poznávacího procesu žáků vycházelo z teorie generického modelu. Uvědomuji si, že analýzy provedené v této práci, stejně jako ale většinu jiných analýz myšlenkových procesů žáků, není možné brát jako ověřená fakta, ale jako hypotetické konstrukty. K dispozici nejsou žádné argumentační nástroje, kterými bych mohla dokázat pravdivost svých hypotéz. Na druhou stranu se však snažím neredukovat žaka na jeho jednotlivé výroky, ale vnímat ho jako osobnost. Např. všímat si jeho vlastností, které se projevují opakovaně jako tvrdohlavost, nejistota nebo vztek v určitých situacích atd. Proto je možné porovnáváním analýz s analýzami z jiných vyučovacích hodin nabýt větší důvěru v jejich hodnověrnost.

Vývoj kognice i metakognice žáka je díky zaznamenání DI a DII sledován jak krátkodobě (během vyučovací hodiny), tak i dlouhodobě (v průběhu jednoho měsíce). Žákovy znalosti i schopnosti jsou při tom vystaveny mnoha impulsům. Impulsy jsou různé síly a různého zaměření, některé jsou více kognitivní, některé jsou spíše emotivní. Při sledování žáka během vyučovací hodiny je zkoumán řetězec: vnější impuls - změny, které tyto impulsy vyvolají ve vědomí žáka - výstupní reakce žáka. Z dlouhodobého pohledu jde pak o porovnání žáka ve dvou časových rovinách vzdálených přibližně jeden měsíc.

Při zkoumání třídy jsou evidovány vzájemné interakce těch žáků, které máme v protokolech k dispozici. Tito žáci jsou vnímáni jako reprezentanti skupin. Takto je možné alespoň celkové vyznění reakcí dobře popsat, protože i ti, co se nijak akusticky neprojevili, se pravděpodobně k některému z vyslovených názorů přiklánějí. Tuto skutečnost jsem měla možnost pozorovat v průběhu obou zaprotokolovaných diskuzí.

1.6. Struktura práce

V úvodní kapitole byly představeny hlavní cíle, motivace a zdroje výzkumu.

V následující kapitole 2 jsou charakterizovány nejdůležitější teorie a pojmy používané v práci.

Kapitola 3 je věnována klíčové myšlence obou diskuzí DI a DII, problému nuly jak z hlediska historie, tak didaktiky matematiky.

Kapitola 4 vychází z analýz vstupů žáků (z DI a DII) vyjadřujících se k otázce, zda je nula sudá, a je organizována podle jednotlivých tvrzení, k nimž se žáci přikláněli.

Kromě ústřední otázky sudosti nuly byly ale hlavně v DI řešeny i další otázky vztahující se k nule. Jejich popis a analýzy přináší kapitola 5.

V DI byl odhalen také rozpor mezi sémantickým a strukturálním vnímáním pojmu nula. Tento rozpor se ukázal u několika žáka jako překážka pro další práci s nulou. Kapitola 6 je tedy jakýmsi souborem návrhů pro učitele jak žákům tuto překážku pomoci překonat.

Závěrečná shrnutí a stručné charakteristiky jevů vyplývajících z analýz myšlenkových procesů žáků v diskuzích jsou předloženy v kapitole 7. Součástí této kapitoly je i má sebereflexe.

2. Teoretická část

Nejprve se zaměřím na zevrubnou charakteristiku dvou polárních způsobů vedení vyučování učitelem, a to na vyučování konstruktivní a transmisivní. Ke konstruktivistickému přístupu je řazen i edukačního styl nazvaný jako Výuka orientovaná na budování schémat (zkráceně VOBS) rozpracovaná M. Hejným a jeho týmem v posledních dvaceti letech.

Edukační styl VOBS je tvořen dvěma složkami. Jak již název napovídá, jednou z těchto složek je budování kognitivních schémat v hlavách žáků v procesu poznávání na základě teorie generických modelů. Pojem schéma je klíčový pro porozumění tomu, co se v žákově mysli odehrává, a pro možnost pochopení významu vytváření sítě generických modelů z modelů izolovaných. Z toho důvodu je pojmu schéma věnována zvláštní část (2.2. a 2.3.), a to nejprve z pohledu jeho užívání různými autory a pak i v pojetí Hejného.

Druhá složka VOBS pojednává o působení učitele ve třídě a o otázce, jak toto působení podporuje nebo nepodporuje budování schémat žáků. Důležitou součástí této složky je diskuze mezi žáky, která zejména v našem experimentu hraje dominantní roli.

2.1. Konstruktivní vs. transmisivní vyučování

Konstruktivismus, jak je uvedeno v Pedagogickém slovníku, je

> široký proud teorií ve vědách o chování a sociálních vědách, zdůrazňující aktivní úlohu subjektu v poznávání světa, význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických a psychologických procesech, důležitost jeho interakce s prostředím a společností (Průcha, Walterová, Mareš, 2013, s. 132).

Od druhé poloviny 20. století, kdy se konstruktivismus začal formovat, vznikla celá řada jeho proudů (sociální konstruktivismus, kognitivní konstruktivismu, didaktický atd.). Zde se však omezím pouze na základní vymezení konstruktivismu v protikladu k transmisivnímu způsobu vyučování.

Jak uvádí Štech (1992), označení transmisivní škola namísto zavedeného označení tradiční škola navrhl Tonucci, protože mu přišlo výstižnější. Pojem transmise, který je ve spojení transmisivní škola nebo transmisivní vyučování použit, totiž lépe vystihuje charakteristický rys tohoto přístupu, a to přenos poznatků v hotové (produktové) podobě. Více je tak zachycen protiklad ke konstruktivistické výuce, která dává důraz na vlastní konstrukci poznatků žáky na základě jejich zkušeností a prostřednictvím činnosti.

Tonucci (1994) stručně zachytil hlavní rozdíl mezi konstruktivním a transmisivním vyučováním ve výstižně nazvané publikaci „Vyučovat nebo naučit?" pomocí tří postulátů. Východiska transmisivního vyučování podle Tonucciho jsou:

> 1. dítě neví (neumí) a do školy přichází, aby se vše naučilo;
> 2. učitel ví (umí) a do školy přichází, aby naučil toho, kdo nic neví;
> 3. inteligence je prázdná nádoba, která se postupně naplňuje kladením poznatků na sebe (Tonucci, 1994, s. 14).

Transmisivní přístup učitele včetně jeho rizik blížeji specifikuje Spilková.

> Tradiční, slovně názorné, transmisivní pojetí vyučování přeceňuje verbální stránku, lpí na metodě výkladu jako na primárním prostředku přenášení vědomostí. Chybí proces vlastního hledání, objevování a zmocňování se poznatků, je nedoceněna žákova samostatná myšlenková i praktická činnost. Žáci si potom osvojují poznatky jako hotové produkty (aniž prošli skutečným poznávacím procesem), jako slova, věty, teorie, za nimiž nemají často žádné konkrétní představy. […] Předávání hotových produktů - poznatků - jako „pravd k věření" na autoritářské a dogmatické bázi vede k nekritickému přijímání a reproduktivnímu myšlení, k absenci vlastních názorů, úsudků a přístupů. Přináší nebezpečí snadné ovlivnitelnosti a manipulovatelnosti autoritami různého druhu (Spilková, 2005, s. 31).

Předpoklady konstruktivního vyučování jako protikladu k transmisivnímu pak podle Tonucciho jsou:

> 1. dítě ví a přichází do školy, aby přemýšlelo nad svými poznatky, aby je organizovalo, prohloubilo, obohatilo a rozvinulo – a to ve skupině;
> 2. učitel zajišťuje, aby každý žák mohl dosáhnout co nejvyšší možné úrovně (kognitivní, sociální, operační) a za účasti a přispění všech;
> 3. inteligence (abychom se drželi již použitého obrazu) je určitá oblast, která se modifikuje a obohacuje restrukturováním (Tonucci, 1994, s. 19).

Oproti transmisivnímu přístupu bere konstruktivistický tedy v úvahu to, že žák do školy přichází již s řadou zkušeností, které získává mimo školu, a z těchto zkušeností je možné vycházet. Ve škole žák své poznatky obohacuje, prohlubuje a dále rozvíjí indiviuálně i kolektivně na základě své činnosti, aktivity.

S tím samozřejmě souvisí i proměna role učitele. Učitel již není garantem pravdy, který poznatky předává, ale spíše prostředníkem (mediátorem) při žákově poznávání, při jeho objevování. Učitel je tedy spíše garantem podmínek učení, metody práce a jejího plodného vyústění. (Tonucci, 1994; Spilková, 2005)

Myšlenky konstruktivismu formulované v obecné pedagogice přenesli do matematiky Davis, Maher, Noddings (1990). Do českého prostředí pak tyto myšlenky uvedl Kuřina (2002a, 2002b). A později byly zpracovány do knižní podoby Hejným a Kuřinou (2009), kde jsou shrnuty pomocí několika zásad nazvaných jako Desatero konstruktivismu. Pro jejich citaci je použita zkrácená verze podle Stehlíkové.

1. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.
2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.
3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.
5. Základem matematického vzdělání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.
6. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
7. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.
10. Poznání založené na reprodukci informací vede k pseudopoznání, k formálnímu poznání (Stehlíková, 2006, s. 30-31).

2.2. Schéma

2.2.1. Schéma z pohledu vybraných autorů

Z obrovského množství literatury, která pojednává o schématech, jsem vybrala jen několik autorů, o nichž se domnívám, že mohou přispět k hlubšímu porozumění metody VOBS.

Podle Andersona a Pearsona (1984) je jako historické východisko pojmu schéma považována **tvarová psychologie** (Gestalt psychologie). Avšak sám Koffka, který společně s dalšími představiteli tzv. berlínské školy Wertheimerem a Köhlerem zformuloval základní principy tvarové psychologie, se přímo odkazuje na Bartletta.

Koffka (1935) velkou část své rozsáhlé práce věnoval paměti a zapomínání a právě zde na základě tehdejších výzkumů poukázal na organizování zapamatovávaného vlivem tvarových zákonů. Stejně tak jako Bartlett i Koffka si představuje paměť jako skladiště, kde se však poznatky nejen hromadí, ale ukládají se zde podle toho, jak spolu souvisejí. Navíc se také navzájem ovlivňují a utvářejí různé skupiny (Koffka, 1935). Pamětní schémata jsou tak dobrým příkladem základní myšlenky tvarové psychologie, tedy že vlastnosti celku se neshodují s vlastnostmi částí, z nichž je složen. Pro názornější vysvětlení lze použít připodobnění W. Köhlera (1947; cit. v Anderson, 1984) k utváření chemických sloučenin, kdy jednotlivé molekuly mají také často zcela jiné vlastnosti než sama sloučenina z nich vytvořená.

Bartlett vymezoval termín schéma jako „aktivní organizaci minulých reakcí nebo zkušeností“[3] (Bartlett, 1932, s. 201). Slovem aktivní tak zdůrazňoval především tvořivý charakter zapamatovávání jako protiklad k pasivně získávaným a neměnným zkušenostem (Anderson, 1984). To, co se kolem nás děje, zanechává po sobě stopu nebo skupinu stop, které jsou ukládány do naší mysli, odkud je určitý podnět může zase vyvolat. Jak již bylo řečeno dříve, k tomuto ukládání nedochází nahodile, ale v rámci schémat, která Bartlett též někdy označuje jako organizovaná uspořádání *(organised settings)*. Tato schémata však nezůstávají neměnná, ale neustále se vyvíjejí pod vlivem dalších zkušeností.

Při řešení otázky způsobu utváření těchto schémat se Bartlett opíral o výzkum anglického neurologa **Heada**. „Pokud má Head pravdu, schémata jsou vystavena

[3] vlastní překlad; originál: „an active organisation of past reactions, or of past experiences“ (Bartlett, 1932; s. 201).

chronologicky. Každá přicházející změna přispívá svou částí k výslednému schématu v pořadí podle okamžiku, ve kterém se stala.“[4] (Bartlett, 1932, s. 203). V teorii Heada je však pojem schéma brán v užším slova smyslu než u Bartletta. Pohlíží na něj spíše jen z hlediska vedení nervových vzruchů (Head, 1920). **Bartlett** však toto hledisko využil pro vlastní teorii paměti. Ukazuje, že nejen chronologičnost má význam při budování schémat. Protože pokud je některý z podnětů intenzivnější, trvá déle nebo je rozsáhlejší než zbylé, může dojít k narušení chronologické konstrukce schématu a tento podnět převezme dominantnější funkci (Bartlett, 1932).

Svou teorii o způsobu zapamatovávání jako konstruktivního procesu Bartlett opřel o několik svých studií, z nichž asi nejznámější je studie o vybavování si informací z čteného textu, konkrétně indiánské lidové pohádky Válka duchů *(The War of Ghosts)*. Sledoval, jak se s odstupem času stávají reprodukce čteného textu zjednodušené a často se i odchýlí od předlohy. Tvrdil, že při tendenci uchovat v paměti v tomto případě text, nejdeme po detailech, ale snažíme se nejprve utvořit si celkový dojem, na jehož základě pak detaily dotváříme. Přičemž výraznou roli v tom, na co si vzpomeneme nebo naopak co opomeneme, hrají kromě jiného naše postoje a zájmy. Zpětné dohledávání detailů na základě utvořeného postoje pak často vede ke sklonu k doplňování dalších detailů, které se však vůbec v původní předloze nevyskytují. Všiml si také, že s prodlužováním času po přečtení textu se v reprodukcích schéma více projevuje, a to v podobě dezinterpretací s ním souvisejících (Bartlett, 1932).

Podobné experimenty popisují ve zprávě k výzkumu o vlivu schémat na porozumění čtenému textu i **Anderson** a **Pearson** (1984). Vybrané skupině lidí dávali číst texty a pak sledovali, k jakému zkreslení čtených informací dojde v souvislosti s délkou doby mezi čtením textu a jeho reprodukcí. Dále si všímali i skutečnosti, že pokud text není úplný nebo není jednoznačně podaný, každý si ho srovnává s určitým svým vytvořeným schématem a podle toho si pak následně domýšlí další informace, které v textu chybí. Může tak dojít až k úplnému odklonu od záměru autora textu. Poukázali též na vliv perspektivy, z které je na text pohlíženo, pro následnou reprodukci textu.

---

[4] vlastní překlad; originál: „If Head is right, schemata are built up chronologically. Every incoming change contributes its part to the total schema of the moment in the order in which it occurs“ (Bartlett, 1932, s. 203).

V jednom z experimentů dvě skupiny čtenářů četly stejný text. Jedna skupina však byla vyzvána, aby na text pohlížela v roli zloděje a druhá jako prodejce domů. Skupina čtenářů, která vnímala text z pohledu zloděje, si při reprodukci textu vybavovala detaily jako například vybavení bytu, které by bylo možné ukrást. Dokonce dost z nich bylo přesvědčeno, že v bytě bylo stereo, i když v textu o něm nepadla ani zmínka. Zcela jiná reprodukce textu se pak objevila u druhé skupiny, která si všimla například detailu týkajícího se kvality střechy. V rozdílných reprodukcích obou skupin čtenářů se tak projevil vliv odlišného schématu, v němž byl text vnímán. V tomto a i v dalších experimentech tak Anderson a Pearson poukázali na skutečnost, jak dochází k propojování čteného na schéma a podle toho pak k ovlivňování představ, které jsou o čteném textu uchovávány.

Na možnost ovlivnit představy lidí o určité události poukázaly i dva trochu provokativní experimenty **Loftusové a Palmera** (1974). Jádrem těchto experimentů bylo promítnutí kratičkého fragmentu videa o automobilové nehodě určitému počtu studentů. Následně pak měli tito studenti jako svědci nehody zodpovědět několik otázek. V prvním provedeném experimentu byl sledován vliv volby slovesa v otázce – Jak rychle jela auta, než se srazila? – na představu o rychlosti automobilů před srážkou. Přičemž slovo „srazila se“ bylo u různých skupin studentů v otázce nahrazováno slovy jako například „střetla se“, „roztřískala“ atd. U výpovědí jednotlivých skupin studentů se ukázal přímý vliv mezi použitím slovesa v otázce a představou o rychlosti vozidel. Ač všichni sledovali stejný úsek filmu, těm co byla položena otázka ve formě – Jak rychle jela auta, než se roztřískala? – odhadovali mnohem vyšší rychlost aut než ty skupiny studentů, které v dané otázce měly použita jiná slovesa. Vybraná slovesa spadala do různých schémat představ studentů, a to ovlivnilo následné vybavování si i dalších detailů z místa nehody, jak ukázal také druhý experiment. S týdenní prodlevou od zhlédnutí filmového záběru autonehody byli studenti dotázáni, zda při sledované nehodě viděli rozbité sklo. Žádné rozbité sklo na snímku nebylo. Mnohem více respondentů však bylo přesvědčeno, že ho vidělo, pokud v dotazníku ihned po zhlédnutí snímku slyšeli v otázce o rychlosti aut sloveso roztřískat se, než tomu bylo u slovesa srazit se. Pokud si tedy zapamatováváme určité události, nevstupují do naší paměti pouze informace získané naším vnímáním, ale i informace dodané zvnějšku až po vnímané skutečnosti. Z jakého zdroje tyto informace při rekonstrukci události čerpáme, však již často nerozlišujeme.

> Tento experiment a mnoho dalších užívajících podobné postupy ukazuje, že související informace jsou obvykle začleňovány do jednoduchého schéma, s obvyklým výsledkem, že lidé nejsou schopni rozlišit mezi informacemi přímo založenými na zkušenosti a těmi, které nebyly aktuálně ověřovány, ale které souvisejí se schématem[5] (Anderson, Pearson, 1984, s. 68).

Gerrig (1991) dále mluví v souvislosti se čtením textu a jeho porozuměním o významu schémat i pro schopnost domýšlení si chybějících informací v textu. V textu nemusí být řečeno vše, ale přesto jsme schopni mu porozumět tím, že využijeme zkušeností uložených v naší paměti. „Teoretici vytvořili termín schéma k označení paměťové struktury, která zahrnuje klastry informací důležitých k porozumění“[6] (Gerrig, 1991, s. 244). Slovo klastr vysvětluje Hejný:

> Slovo „cluster“ nemá v českém jazyce přiměřený ekvivalent. Označuje shluk, seskupení, chumel, hlouček, trs nebo hrozen. [...] Proto si dovolíme převzít slovo klastr do české terminologie didaktiky matematiky. Tímto termínem budeme označovat soubor zatím nepropojených nebo jen málo navzájem propojených informací náležících jednomu schématu (Hejný, 2007, s. 85, 86).

Jako příklad Hejný uvádí, že třeba slova tři, pět, osm malé dítě vnímá jako informace klastru čísel či počtu, ale ještě nezná jejich přesný význam (Hejný, 2007). „Základní vhled do teorií schématu je tedy, že v paměti nemáme jenom izolovaná fakta. Informace jsou shlukovány do smysluplných funkčních jednotek“[7] (Gerrig, 1991, s. 245).

Gerrig dále říká

> Schémata máme skoro pro všechno, s čím se setkáváme (např. kanceláře, židle, účetní), a všechno, co děláme (např. hraní baseballu, navštěvování koncertů a skládání prádla). Informace uložené ve schématech jsou abstrahovány

[5] vlastní překlad; originál: „This experiment and many others using similar procedures show that related information is usually assimilated into a single schema, with the frequent result that people are unable to distinguish between information with a direct basis in experience and that which was not actually experienced but which is consistent with the schema“ (Anderson, Pearson, 1984, s. 68).

[6] vlastní překlad; originál: „Theoretists have coined the term schemata to refer to the memory structures that incorporate clusters of information relevant to comprehension“ (Gerrig, 1991, s. 244).

[7] vlastní překlad; originál: „A primary insight of schema theories is that we do not just have isolated facts in memory. Information is gathered together into meaningful, functional units“ (Gerrig, 1991, s. 245).

z množství různých příkladů (všechny židle, které jsme viděli) nebo příležitostí (vždy, když jsme hráli baseball)[8] (Gerrig, 1991, s. 245).

Dobrým příkladem může být experiment **Brewera a Treyense** (1981). Třicet lidí bylo postupně přivedeno do místnosti označené jako kancelář. Po ani ne minutě pak byli odvedeni do nedaleké posluchárny a vyzváni, aby sepsali vše, co si z kanceláře, kde čekali na experimentátora, vybavují. Ukázalo se, že lidé si nejvíce vzpomínali na předměty, které souviseli s jejich schématem kanceláře. Méně už však na ty, které obvykle do kanceláře nepatří. V soupisu předmětů se také nezřídka objevily věci, které často v kancelářích bývají, patří tedy do našeho schématu kanceláře, ale v této kanceláři nebyly.

Podle Andersona (1985) však ve schématech nemusí být ukládány pouze objekty nebo pojmy, mohou v nich být zastoupena i jednání. Pro tento typ schémat zavádí **Schank a Abelson** (1977) pojem scénář *(script)*. Termínem scénář označovali „paměťovou strukturu, která vymezuje soubor jednání, která lidé dělají ve stereotypních situacích“[9] (Gerrig, 1991, s. 245). Schank a Abelson chápali scénář jako sled jednání odehrávajících se v naprosto běžných každodenních situacích jako čekání na autobus, návštěva divadla, oslava narozenin nebo jídlo v restauraci. Např. scénář v restauraci zahrnuje sled jednání jako: vejít do restaurace, posadit se, požádat o jídelní lístek, objednat si, sníst jídlo, požádat o účet, zaplatit ho a odejít. Přičemž výčet těchto jednotlivých úkonů může být mnohem rozsáhlejší, avšak zbytečný. Pokud vyprávíme příběh, který odkazuje na nějaký scénář, není potřeba mluvit o všech detailech příběhu. I když zmíníme pouze základní informace, odkaz na důvěrně známý scénář posluchačům umožní příběhu porozumět, aniž bychom je unudili výčtem těchto detailů (Schank, Abelson, 1977). Scénáře nám tedy umožňují „vynechat nudné detaily, když mluvíme nebo píšeme, a doplnit je, když je posloucháme nebo čteme“[10] (Schank, Abelson, 1977, s. 41).

---

[8] vlastní překlad; originál: „We have schemata for almost everything we have encountered (e.g., offices, chairs, and accountants) and everything we have done (e.g., playing baseball, attending concerts, and folding laundry). The information stored in a schema is abstracted over many different instances (all the chairs we have seen) or occasions (all the times we have played baseball)“ (Gerrig, 1991, s. 245).

[9] vlastní překlad; originál: „a memory structure that specifies a list of actions that people carry out in stereotypical situations“ (Gerrig, 1991, s. 245).

[10] vlastní překlad; originál: „[to] leave out the boring details when you are talking or writing, and fill them in when you are listening or reading“ (Shank a Abelson, 1977, s. 41).

> Scénáře nebo schémata existují, protože zakódovávají převažující sekvence jednání v konkrétních situacích. A tak mohou sloužit jako cenný základ pro předvídání chybějících informací pro opravování chyb v informacích[11] (Anderson, 1985, s. 133).

Jak je patrné z předchozího textu, velký zájem o problematiku schémat můžeme najít v 80. letech 20. století v rámci kognitivní psychologie. Jako protiklad k behaviorismu se kognitivní psychologové začali zajímat o vše, co se týkalo poznávacího procesu. „V několika předchozích letech jsme byli svědky pozoruhodného zvýšení zájmu o výzkum kognitivních procesů – tedy prostředky, kterými organismus získává, uchovává a transformuje informace“ (Bruner a kol., 1986; cit. z Plháková, 2006, s. 230).

Jedním z kognitivních psychologů, který se zabýval teorií schémat a stal se i oporou pro mnoho dalších autorů, je švýcarský psycholog **Piaget**. Pro Piageta je pojem schéma „strukturou nebo organizací činnosti, takže se činnost může přenášet nebo zobecňovat již při prvním opakování za podobných nebo analogických okolností“ (Piaget, 1997, s. 15). Piaget tedy schéma používá v souvislosti s chováním organismu, s jeho schopností adaptovat se, která je založena na dvou klíčových principech, asimilace a akomodace. Oba principy poukazují na proměnlivost schémat. Asimilace spočívá ve schopnosti začleňovat nové zkušenosti do dřívějších schémat a akomodace ve schopnosti přizpůsobit se těmto novým prvkům (Piaget, Inhelderová 1997, Piaget 1999).

2.2.2. Schéma ve snahách o vytvoření umělé inteligence

Velký vliv na další rozpracování problému schémat vyplýval z nárůstu zájmu o počítačové technologie a především z diskuze o jejich využití v umělé inteligenci. Schémata se stala klíčem snah porozumět organizování lidských znalostí v mozku za účelem využití těchto poznatků právě pro umělou inteligenci.

Jak **Minsky**, jeden ze zakladatelů laboratoře umělé inteligence na MIT, popisuje ve své knize The Society of Mind (1986), za spolupráce s Papertem a dalšími vytvořili robotický přístroj, který ho přivedl k úvahám o organizaci lidského myšlení. Původně šlo především o snahu vytvořit počítačový program schopný

[11] vlastní překlad; originál: „Scripts or schemas exist because they encode the predominant sequence of events in particular kind of situation. Thus, they can serve as valuable bases for predicting missing information and for correcting errors in information“ (Anderson, 1985, s. 133).

ovládat mechanické ruce, propojené s počítačem a kamerovým systémem pro snímání obrazu, které by byly schopné dělat na první pohled tak jednoduchou věc jako postavit věž z kostek.

> Tento projekt nás dovedl k překvapujícímu zjištění, že ani tisíc nejjednodušších dovedností by nebylo dost k tomu, aby umožnily dítěti naplnit kyblíček pískem. Právě tyto zkušenosti nás přivedly k mnoha úvahám o uspořádání myšlenek, spíše než to, co jsme se naučili o psychologii [12] (Minsky, 1986, s. 29).

Uspořádání myšlenek Minsky označuje v překladu spíše jako „společenství mozku“ *(society of mind)*. Základem této teorie je, že každá myšlenka je tvořena z množství menších procesů, které nazývá jako agenty, zástupce *(agents)*. „Každý mentální agent sám může dělat jen nějaké jednoduché věci, které nevyžadují vůbec žádné myšlenky nebo myšlení“[13] (Minsky, 1986, s. 17). Tito jednotliví agenti pak až na základě jejich propojení a vzájemného působení vytvářejí inteligenci. Inteligence je tedy výsledkem součinnosti těchto neinteligentních částí.

V souvislosti s počítačovými systémy se i **Collins** a **Quillian** (1969) snažili vytvořit model uspořádání sémantických informací v paměti. Vycházeli z předpokladu, že naše znalosti jsou organizovány v paměti jako síť zobecňovaných hierarchicky uspořádaných informací. Pokud si tedy například do paměti ukládáme větu „kanárek je žlutý pták, který umí létat“, vytvoříme si spojení souboru označeného jako kanárek s jeho jednou vlastností, je žlutý. Skutečnost, že umí létat, již nepotřebujeme ukládat, protože tato vlastnost přímo souvisí s informací, že kanárek je pták. Schopnost létání tak není v paměti ukládána pro každého zástupce ptačí říše zvlášť, ale je uložena obecně ke kategorii pták, a tím platí i pro všechny její zástupce. Jak Collins a Quillian zmiňují, jde o tzv. poznávací ekonomii, protože tento způsob organizace našich vědomostí minimalizuje nároky na prostor jinak potřebný pro jejich uložení.

[12] vlastní překlad; originál: „The project left us wondering if even a thousand microskills would by enough to enable a child to fill a pail with sand. It was this body of experience, more than anything we´d learned about psychology, that led us to many ideas about societies of mind“ (Minsky, 1986, s. 29).

[13] vlastní překlad; originál: „Each mental agent by itself can only do some simple thing that needs no mind or thought at all“ (Minsky, 1986, s. 17).

2.2.3. Schéma v didaktice matematiky

Jak již bylo řečeno dříve, pojetí schémat se u jednotlivých autorů liší. Tato pojetí jsou však ovlivněna i tím, ve které oblasti se jimi zabýváme (z hlediska různých odvětví psychologie, didaktiky matematiky...) a který problém pomocí nich uchopujeme. A jelikož práce je orientována především na žáky a výuku matematiky, a to zejména na 1. stupni základní školy, následující výběr autorů se soustředí právě tímto směrem.

Fischbein (1997[14], 1999) ve svých výzkumech, zabývajících se porozuměním i jeho vývojem u žáků a studentů v přírodních vědách a v matematice, poukazuje na vztah mezi schématy a intuicí. Pojem intuice definuje jako „poznání, která se zdají být subjektivně zcela zřejmá, bezprostřední, jistá, souhrnná a která jsou schopna ovlivňovat výběr strategií“[15] (Fischbein, 1999, s. 11).

Bezprostřednost a zřejmost poznání chápe Fischbein jako typ intuitivního poznání, které je přijato ihned bez pocitu nutnosti dalšího ověření. Příkladem může být výrok, že nejkratší vzdálenost mezi dvěma body je přímá čára. Intuitivní poznání je tedy dále propojeno i s jistotou a vnitřním přesvědčením, kdy pocit jistoty správnosti výroku je takový, že není potřeba žádné vnější opory (například pomocí výpočtu, dokazování...).

Dále je intuice také schopna ovlivňovat individuální výběr strategií řešení. Proto má člověk někdy tendenci zavrhnout strategie, které nekorespondují s jeho intuicemi. A tak například intuice, že násobením vznikají větší čísla a dělením menší, povede k výběru správné strategie řešení v oboru celých čísel, ale horší to již bude v oboru čísel racionálních. To Fischbein dokazuje i na úloze, kolik budou stát 3 litry džusu, když 1 litr stojí 3 šekely (izraelská měna). V tomto případě většina žáků bez zaváhání použila pro výpočet násobení. Horší to však již bylo při obměně zadání na - kolik bude stát 0,75 litrů džusu, když jeden litr stojí 5 šekelů. Tentokrát se většina řešitelů snažila použít dělení. Intuice, že menší čísla vznikají dělením, zde není korektní a výběr strategie by tedy bylo lépe opřít o logickou úvahu. V souvislosti s touto vlastností intuicí Fischbein upozorňuje na význam seznamování učitelů s touto problematikou nejen proto, aby byli schopni nahlížet do možných příčin chyb žáků i studentů, ale především, aby žáky vedli k uvědomování si potřeby zamýšlet

[14] Spoluautorem článku z roku 1997 je i Grossman.
[15] vlastní překlad; originál: „cognitions which appear subjectively to be self-evident, immediate, certain, global, coercive“ (Fischbein, 1999, s. 11).

se nad svými tvrzeními, jejich odůvodňováním, protože ne každá intuice musí být v dané situaci korektní, i když třeba v jiné platí.

Jednou z dalších vlastností intuitivního poznání je jeho schopnost vyvozování i tam, kam až nedosahují naše zkušenosti. Příkladem je třeba výrok, že za každým celým číslem následuje další číslo. Ačkoliv tento výrok nemůžeme čistě opřít o naši zkušenost, posloupnost u menších čísel přenášíme i na její pokračování.

Jako poslední vlastnost intuicí Fischbein uvádí jejich komplexnost v protikladu s poznáním, které je získáno logicky, tedy postupně, analyticky.

Všechny tyto uvedené příklady intuicí patří do kategorie tzv. potvrzujících intuicí *(affirmatory intuitions)*. Fischbein však rozlišuje ještě jednu kategorii intuicí, kterou nazývá intuice předjímající *(anticipatory intuitions)*. Předjímající intuice představují celkovou představu o tom, jak řešit danou úlohu. Jinými slovy by se dalo říci, že jde o prvotní osvícení, díky němuž získáváme představu o možném způsobu řešení problému, i když jeho jednotlivé kroky nám ještě nejsou známy a budou teprve odhaleny. Fischbein uvádí, že i vlivu tohoto typu intuicí by si učitel měl být vědom při své práci. Při řešení úlohy si totiž žák často není schopen ihned vytvořit představu o jednotlivých krocích postupu řešení úlohy, jak je na něm vyžadováno, ale má celkovou představu a jednotlivé kroky teprve hledá. Kroky jsou zatím ve tmě, nevidí je, postupně se mu však osvětlují (Fischbein, 1999).

Fischbein (1997) dále upozorňuje, že je potřeba rozlišovat mezi intuicí a náhodným hádáním. Oproti hádání jsou intuice založeny na nějaké počáteční informaci, na nějaké mentální operaci. Házíme-li mincí, zprvu pouze hádáme, zda padne hlava nebo orel. Jestliže však již třikrát padla hlava, odhadujeme, že padne orel. Tentokrát už nejde o náhodné hádání, nýbrž o intuitivní, protože je opřeno o počáteční informaci - vím, co padlo v předcházejících hodech a že pravděpodobnost padnutí hlavy nebo orla je stejná.

Intuice tedy nejsou náhodné, ale jsou založeny na určitých strukturálních schématech (viz dále). Schémata také intuice zevnitř ovládají a tvarují. Vymezení pojmu schéma Fischbein opírá o teorii Piageta a charakterizuje ho jako „program, který umožňuje jednotlivci: a) zaznamenávat, zpracovávat, kontrolovat a mentálně začleňovat informace, a b) reagovat smysluplně a efektivně na podněty prostředí"[16] (Fischbein, 1999, s. 39). Slovem program naznačuje, že se „schéma skládá z ustálené posloupnosti kroků vedoucí k určitému cíli"[17] (Fischbein, 1999, s. 39). Zdůrazňuje však, že nejde o program mechanicky prováděných kroků, protože schémata jsou struktury založené logicky (Fischbein, 1997).

Fischbein rozlišuje dva typy schémat, specifická schémata a strukturální schémata. ***Specifická schémata*** nebo také schémata činnosti *(specific/ action schemata)* označují schémata skládající se ze série činností. Je to například posloupnost kroků při aritmetických operacích, při řešení určitého problému nebo sled činností při řízení kola (Fischbein, 1999). Jde však také o každý pojem se specifickým významem (např. trojúhelník, obor čísla...), který předurčuje podmínky pro rozlišení daného objektu nebo vykonání určité operace (Fischbein, 1997).

Strukturální schémata *(structural schemata)* jsou schémata s velkým vlivem na naše chování a intelektuální schopnosti. Příkladem jsou třeba schémata třídění, uspořádání a čísel. S oporou o pojetí Piageta považuje Fischbein každý stupeň intelektového vývoje člověka za charakteristický tím, že vytváří určité typy těchto schémat (Fischbein, 1999).

> Ale schémata představují více než jenom posloupnost reakčních kroků: zahrnují v sobě složité, hierarchické organizace, které nemohou být rozvíjeny pouhým memorováním informací (Fischbein, 1997, s. 45).[18]

> Ve jménu didaktických cílů učitelé někdy začínají od konkrétních příkladů, které později zobecňují. Ale skutečného porozumění určitým pojmům nebo operacím může být dosaženo pouze, když je vybudována plná hierarchie schémat a je mentálně začleněna studentem (Fischbein, 1997, s. 31).[19]

Kromě toho, že jsou intuice založeny na schématech, vztah mezi těmito dvěma pojmy Fischbein popisuje i na základě principu komprese (zestručňování) (Fischbein, 1997). „Fenomén komprese se zdá mít základní roli v mechanismu

---

[16] vlastní překlad; originál: „a program which enables the individual to: a) record, process, control and mentally integrate information, and b) to react meaningfully and efficiently to the environmental stimuli" (Fischbein, 1999, s. 39).
[17] vlastní překlad; originál: „a schema consists in an established sequence of steps leading to a certain purpose" (Fischbein, 1999, s. 39).
[18] vlastní překlad; originál: „But schemata represent more than mere sequences of reactive steps: they imply complex, hierarchical organizations and these cannot be developed by mere local memorization of information" (Fischbein, 1997, s. 45).
[19] vlastní překlad; originál: „For didactic purposes teachers start, sometimes, from particular instances and generalize only later. But a genuine understanding of a certain concept or operation can be reached only when the full hierarchy of schemata is established and mentally integrated by the student" (Fischbein, 1997, s. 31).

intuicí [...]. [...] Schéma se stává intuicí kompresí, zmenšením sebe sama do minimální struktury“[20] (Fischbein, 1997, s. 42). Přičemž ale ne každé zestručnění musí nutně vést k intuici (např. symboly, nové termíny, definice přinášejí určité zestručnění, avšak intuicemi nejsou). „[...] Zestručnění vede speciálně k intuitivnímu poznání, pokud za tímto poznáním leží strukturální schéma“[21] (Fischbein, 1997, s. 42). Pro příklad může posloužit úloha pro žáka 2. ročníku ZŠ, najdi dvě lichá čísla, aby jejich součet byl opět číslo liché. Žák po několika neúspěšných pokusech tvrdí, že taková čísla najít nelze, anebo jsou strašně velká, protože ty ve svých pokusech neprověřil. Na základě intuicí již ale začíná tušit, že to tak bude platit vždy. Pak si všimne v lichých číslech posledních jejich číslic, tedy 1, 3, 5, 7 nebo 9, a ukazuje, že pokud sečte libovolnou dvojici těchto číslic, bude vždy součet sudý, nezávisle na velikosti čísel. V tomto okamžiku dochází ke kompresi.

Vztahu mezi schématy a intuicemi si ve své práci všímá i **Hershkowitz**. Oba dva pojmy chápe jako dva vzájemně se doplňující činitele při řešení úloh v matematice.

> Na intuice a schémata můžeme pohlížet jako na uzavřený kruh. Čím více schémat člověk získá, tím více má intuicí. Vzdělávací výzvou tedy je umožnit dětem rozvíjet bohatá matematická schémata vedoucí k více intuicím pro řešení matematický problémů[22] (Hershkowitz, 2009, s. 40).

Schémata pro řešení matematických úloh se začnou rozvíjet v okamžiku, kdy dítě začne chápat význam a použití čísel. Potupně začne čísla využívat pro popis množiny objektů a vytvářet nová schémata podle toho, jak se množiny objektů budou lišit, když k nim objekty přidáme nebo od nich nějaké odebereme. Hershkowitz tato schémata nazývá jako část-část-celek *(part-part-whole)*. Příkladem schématu část-část-celek je třeba součtové schéma: část + část = celek, které umožňuje řešit a především porozumět jednoduchým úlohám s jednou operací, v tomto případě se sčítáním. Pokud dítě řeší úlohu, že má v košíku 4 zelená a 3 červená jablka a kolik jich má dohromady, pomocí schématu vytvořeného pro spočítání objektů

[20] vlastní překlad; originál: „The phenomenon of compression seems to have a fundamental role in the mechanism of intuitions [...].“ „[...] The schema becomes an intuition by getting compressed, by reducing itself to a minimal structure“ (Fischbein, 1997, s. 42).
[21] vlastní překlad; originál: „compression leads specifically to an intuitive cognition, if a structural schema lies behind this cognition“ (Fischbein, 1997, s. 42).
[22] vlastní překlad; originál: „We can look at intuition and schema as a closed circuit. The more schemata a person acqiures, the more intuition he has. The educational challenge is to enable children to develop rich mathematical schemata leading to more intuitions for solving mathematical problems“ (Hershkowitz, 2009, s. 40).

daných množin dá všechny objekty dohromady a spočítá je. Jiné je to však, pokud úloha bude zadána nejprve od celku. V košíku je 7 jablek, z toho 3 jsou červená a ostatní zelená. Kolik je zelených jablek? Intuitivně se dítě pokusí použít schéma předchozí úlohy a sečíst 7 + 3. Avšak zkušenost a matematické porozumění, které vedlo k vybudování schématu část-část-celek, ho nasměruje k uvědomění, že červená jablka jsou jen součástí všech jablek (Hershkowitz, 2009). Jednoduchá schémata jako např. část-část-celek pak vytvářejí schémata složitější pro řešení náročnějších úloh s více početními operacemi. Přičemž celek jednoduchého schématu může být zároveň částí jiného schématu. Schémata tedy představují stavební kameny pro všechny problémy, které dítě řeší, a je tedy nutné na jejich budování postavit výuku (Hershkowitz, Nesher, 2003; Hershkowitz, 2009).

Další, kdo teorii schémat opírá o myšlenky Piageta, je **Vergnaud** (2009). Jak sám ale říká, jeho pojetí schémat je širší než jen omezení se na jejich adaptabilní vlastnost na základě asimilace a akomodace. Schéma Vergnaud definuje jako „neměnnou organizaci chování pro určitý druh situací. [...] Neměnný charakter schémat pro jednotlivce neznamená, že schémata jsou stereotypní. To, co je neměnné, je organizace chování, ne chování samo“[23] (Vergnaud, 1998, s. 229). Tato organizace se skládá z a) cílů, dílčích cílů a očekávání, b) pravidel činností c) operačních invariant, tedy z konceptů[24] a tvrzení[25] vázaných na činnost (*concept-in-action, theorem-in-action*) a d) možností vyvozování a dělání závěrů. „Pojem schéma tedy nejenom zahrnuje zjevné chování, ale také cíle, operační invarianty a pravidla, která tvoří základ implicitních výběrů a rozhodování“[26] (Vergnaud, 1998, s. 232).

[23] vlastní překlad; originál: „invariant organization of behaviour for a certain class of situations.“ [...] „The invariant character of a scheme for an individual does not mean that schemes are stereotypes. What is invariant is the organization of behavior, not the behavior itself“ (Vergnaud, 1998, p. 229).

[24] Žák se manipulací s dřívky učí postavit čtverec a zároveň tak poznává základní vlastnosti čtverce. Zjišťuje, že pro jeho sestavení potřebuje čtyři dřívka a odhaluje i způsob jejich položení, aby čtverec vznikl. Tato činnost se mu posléze vybaví, až bude o čtverci znovu řeč. Čtverec má v hlavě uložen v souvislosti s činností, kterou prováděl, jako koncept-v-činnosti (*concept-in-action*). Toho v budoucnu využije například při objevování výpočtu obvodu čtverce.

[25] Příkladem tvrzení-v-činnosti (*theorem-in-action*) může být výpočet obsahu mřížového trojúhelníku, který je částí mřížového pravoúhelníku a jedna jeho strana je shodná s jednou stranou tohoto pravoúhelníku. Obsah trojúhelníku žáci počítají jako obsah pravoúhelníku mínus obsahy dvou pravoúhlých trojúhelníků, které je nutné z pravoúhelníku odebrat. Tato zkušenost vede žáka k objevu známého vzorce k výpočtu obsahu trojúhelníku, který vzniká jako tvrzení-v-činnosti.

[26] vlastní překlad; originál: „The concept of scheme covers not only the overt behaviour, but also the goals, operational invariants and rules that underlie implicit choices and decisions“ (Vergnaud, 1998, s. 232).

> Máme schémata pro formulaci tvrzení v matematice stejně tak jako pro jiné oblasti lidské činnosti: schémata máme pro diskutování a argumentování, dialog s druhými, přednášení nebo psaní textů. Schémata mají fyzické, jazykové a sociální složky. Jejich hlavní charakteristikou je jejich funkčnost: fungují na problémech a zabývají se jimi, za účelem překonat nesnáze a organizovat postup ve vyrovnávání se s těmito problémy. Pokud naše schémata selžou, vyvineme kognitivní činnosti, abychom je přizpůsobili vlastnostem problémů, které mohly obtíže zapříčinit[27] (Vergnaud, 1998, s. 235).

V souvislosti se schématy Vergnaud mluví dále i o tzv. konceptuálních či pojmových polích (*conceptual fields*). Konceptuální pole jsou tvořena ze shluku vzájemně propojených konceptů a na jejich vývoji se podílejí právě schémata.

Schémata u Vergnauda hrají důležitou roli v utváření kognitivní struktury kompetencí jako nezbytného předpokladu našeho uplatnění v životě. Kompetence získáváme na základě zkušeností, naší praxí (Vergnaud, 1998). „Hodně z našich znalostí se skládá z kompetencí. Máme jich tisíce. Jsou organizovány v hierarchických systémech a vyvíjí se po celý život“[28] (Vergnaud, 1998, s. 228).

S pojmem schéma souvisí pojem procept, který zavedli a přesně vymezili **Gray a Tall** (1994). Slovo procept vzniklo složením pojmů proces a koncept. Například když se malé dítě snaží spočítat počet objektů, ukazuje a říká 1, 2, 3, to je proces. Poslední číslo 3 (může ho i zopakovat) udává ale zároveň výsledný počet objektů, tedy koncept. Číslo 3 tak v tomto případě v sobě obsahuje nejen proces, ale i koncept a je tedy proceptem. Jde však o velmi jednoduchý procept. Tyto jednoduché procepty jsou ale schopny vytvářet další procepty v hierarchické organizaci. V experimentech vycházejí Gray a Tall z jednoduché aritmetiky a soustředí se především na znakové zápisy. Upozorňují na dvojznačnost zápisu v matematice, který v sobě nese proces a zároveň výsledný produkt tohoto procesu. Např. v zápisu 3 + 2 je vidět proces sčítání, ale i jeho výsledek, součet těchto čísel. Stejně tak zápis *a/b* je zároveň konceptem podílu i procesem samotným, *a* děleno *b*.

---

[27] vlastní překlad; originál: „We have schemes to produce sentences for mathematics, as well as for other domains of human activity: we have schemes to discuss and argue, dialogue with others, give lectures, or write texts. Shemes have physical, linguistic and social components. Their main characteristic is their operationality: they operate on situations and deal with them in order to overcome the difficulties, and organize progress in the managing of these situations. When our schemes fail, we develop cognitive activities to accommodate them to the properties of the situations that may have caused trouble“ (Vergnaud, 1998, s. 235).

[28] vlastní překlad; originál: „Most of our knowledge consists of competences. We have thousands of them. They are organized in hierarchical systems and develop through life“ (Vergnaud, 1998, s. 228).

„Dvojznačnost zápisu umožňuje myslícímu člověku pružně v myšlenkách přecházet od procesu, jímž nějakou úlohu řeší, ke konceptu, s nímž pracuje jako s částí širšího schématu“[29] (Gray, Tall, 1994, s. 115). Jinými slovy tedy nestačí pro vytvoření proceptu pouze používat znakový zápis, ale je nutné jeho propojení na budování schémat.

Pro úplnost je nutné dodat ještě APOS teorii **Dubinského**, která má dokonce slovo schéma ve zkratce svého názvu. Název APOS v sobě skrývá čtyři klíčová slova: akce, proces, objekt a schéma. Ale protože se tato teorie soustředí především na proces učení u vysokoškolských studentů, nebudu se jí podrobně zabývat (Dubinsky, McDonald, 1999).

[29] překlad z Hejný (2007, s. 83); originál: „The ambiguity of notation allows the successful thinker the flexibility in thought to move between the process to carry out a mathematical task and the concept to be mentally manipulated as part of a wider mental schema“ (Gray, Tall, 1994, s. 115).

2.3. Schéma v pojetí Milana Hejného

Jak sám Hejný (2007) uvádí, jeho chápání pojmu schéma se opírá o teorii proceptu Graye a Talla, APOS teorii Dubinského, ale především o pojetí schématu Gerriga. Jak Gerrig pojem schéma užívá, je uvedeno v části 2. 2. 1. Oproti Gerrigovi však v práci Hejného není vymezení pojmu schéma tak široké, protože se zaměřuje především na schémata v oblasti matematiky.

V publikacích Hejného (např. 2007, 2008a, 2008b) je na matematické schéma pohlíženo jako na „dynamickou organizaci různorodých prvků“ (Hejný, 2007, s. 86).

> Slovo organizace zdůrazňuje, že se nejedná jen o množinu prvků, ale i o soubor vazeb mezi prvky. Adjektivum dynamická poukazuje na krátkodobou i dlouhodobou proměnnost jak souboru prvků, tak i celé jejich organizace. Přitom některá schémata jsou stabilnější, jiná flexibilnější. Navíc některá rozsáhlejší schémata vznikají propojením menších schémat (Hejný, 2007, s. 86).

V rámci matematiky dynamizmus neprobíhá jako plynulý proces, ale je spíše nárazový. Hejný navíc zdůrazňuje, „že i v době, kdy se žák daným objektem nezabývá, může se příslušné schéma měnit v důsledku jeho provázanosti na jiná, měnící se schémata“ (Hejný, 2007, s. 86).

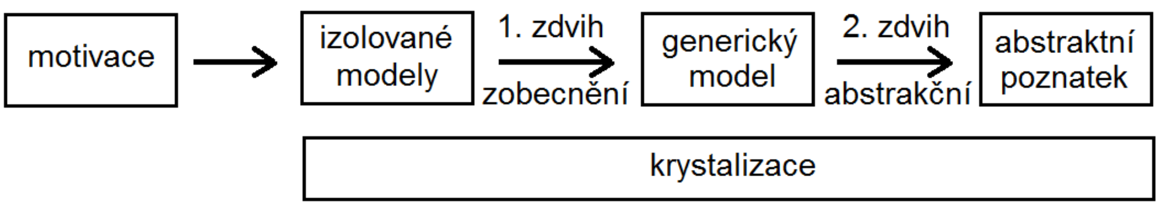
Chápání pojmu schéma v oblasti matematiky i mimo ni je charakterizováno pomocí šesti základních tezí.

> Teze T1. Schémata pomáhají člověku orientovat se v životě.
> Teze T2. Schémata se utvářejí většinou spontánně v důsledku potřeb člověka. Kde potřeba schází, schéma se nevytvoří.
> Teze T3. Schémata téhož výseku reality se ve vědomí různých lidí liší. To může být příčinou nedorozumění.
> Teze T4. Lidé, kteří společně řeší nějaký problém, mohou ve vzájemné interakci dospět k lepšímu řešení, než by došel každý sám. Navíc člověk, který má vědomost o schématech jiných lidí, může jejich znalosti a rady využívat.
> Teze T5. Prvky, které vstoupily do schématu s nízkým zvědoměním a nízkou frekvencí, zanikají rychle. Prvky, které vstoupily s vysokým zvědoměním a vysokou frekvencí, přetrvávají dlouho.
> Teze T6. Prvky schématu, které si člověk nepamatuje, je nutno mít v dostupné externí paměti, aby byly v případě potřeby k dispozici. Externí paměť uvolňuje kognitivní energii na realizaci náročnějších úkonů. Používání externí paměti je součástí intelektuální strategie člověka (Hejný, 2014, s. 92, 93).

V souvislosti se schématy je používán ještě termín **struktura**, který představuje vyšší instanci v poznání než schémata. Strukturu chápe jako součást lidského vědomí a definuje ji jako „relativně ucelený systém pojmů a propojujících se vztahů, jehož prvky jsou přesně vymezeny a popsány pomocí aspoň jednoho formalizovaného jazyka“ (Hejný, 2007, s. 92). Zeptáme-li se žáka základní školy, co je to kružnice, nejspíše popíše proces, jak ji udělá kružítkem nebo obtažením kulatého předmětu (například mince). V tomto případě má utvořeno schéma kružnice. Pokud však řekne a rozumí tomu, že jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od daného bodu, došlo již k posunu pojmu kružnice ve směru strukturace. Utváření struktur není cílem a ani v možnostech žáků 1. stupně základní školy. U mnoha pojmů však mohou žáci mít vytvořena tak kvalitní schémata, že u nich bude patrná již tendence ke strukturaci. Pro takováto schémata Hejný používá termín proto-struktura. „Proto-struktura již obsahuje některé základní argumentační postupy, ale zatím jen na intuitivní úrovni“ (Hejný, 2007, s. 92).

2.3.1. Teorie generického modelu

Pojem schéma je úzce propojen s teorií generického modelu[30]. Základem této teorie je rozdělení poznávacího procesu do pěti etap (obr. 2).



Obrázek 2: Poznávací proces podle teorie generického modelu

Na počátku poznávacího procesu stojí **motivace**. Motivaci Hejný chápe jako „touhu po poznávání, která pramení z rozporu mezi ‚nevím‘ a ‚potřebuji znát‘ “ (Hejný, 2008a, s. 4). Touha po poznání je dítěti vrozená. Děti mají silnou potřebu poznávat vše, co je obklopuje a získávat nové zkušenosti. Motivace také zásadně ovlivňuje kvalitu celého poznávacího procesu, protože ho směruje a dodává mu energii. „Žák, který má vnitřní potřebu poznávat, poznává intenzivněji, hlouběji a komplexněji než ten, který je k poznávání nucen“ (Hejný, 2014, s. 42). V případě, že je dítě či žák

[30] Teorie generických modelů Milana Hejného navazuje na práci jeho otce Víta Hejného.

k poznávání nucen, nemluvíme již o motivaci ale o stimulaci[31]. Bohužel ve školním prostředí dochází spíše k stimulaci než k motivaci žáka. Úsilí žáka je obvykle podmiňováno snahou o získání dobré známky, zalíbení se učiteli nebo uspokojení rodičů. Ve škole se tak nezřídka setkáváme s tendencí učitelů žáky motivovat přípravou her, soutěží či zapojením atraktivních témat. „Zkušenosti [však] ukazují, že nejúčinnější motivace přichází z žákova pocitu úspěchu. Z jeho radosti, kterou mu přináší pocit dobře vyřešené přiměřeně náročné úlohy. Zřídlo této radosti je dvojí: vnitřní pocit intelektuálního růstu a sociální uznání, pochvala, odměna“ (Hejný, 2014, s. 44).

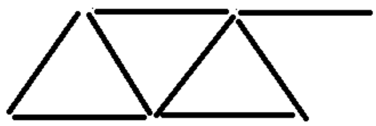
Zásadní význam v poznávacím procesu mají **izolované modely**. Neformální poznání je charakteristické vytvořením bohaté zásoby izolovaných modelů a vazeb mezi nimi. Izolovaný model je v práci Hejného chápán jako „konkrétní případ příští znalosti“ (Hejný, 2008a, s. 4). „Izolovaný model má charakter ukázky, univerzální model představuje obecný návod, algoritmus, vzorec, graf [...]“[32] (Hejný, 2009, s. 132). U izolovaných modelů lze rozlišit 4 stádia jejich vývoje.

1. Ve vědomí se usadí první konkrétní zkušenost, první model – zárodek příštího poznání.
2. Postupný příchod dalších a dalších izolovaných modelů, které zatím nejsou propojeny.
3. Některé modely začnou na sebe navzájem poukazovat a shlukovat se do skupin a oddělovat od jiných. Vzniká předtucha, že tyto modely jsou v jistém smyslu stejné.
4. Zjištění podstaty oné stejnosti vede k vytvoření komunity [izolovaných] modelů (Hejný, 2008a, s. 4).

Na základě propojování izolovaných modelů, resp. zobecňování poznatků v rámci izolovaných modelů a jejich vazeb, vznikají **modely generické** (Hejný, 2011). Ty jsou zároveň tzv. prototypy komunity izolovaných modelů, která určitý generický model tvoří (Hejný, 2008a). Generický model je možné si představit například jako návod, vztah nebo postup. Vznik generických modelů z izolovaných lze názorně ukázat na úloze se dřívky. Ze tří dřívek je postaveno trojúhelníkové okno. Přiložením dalších dvou dřívek k předchozím vznikne další okno a tak dále, jak ukazuje

[31] „Rozdíl vychází z latinských slov: moveô = hýbati, pohybovati, stimulô = ostnem bodati, píchati“ (Hejný, 2014, s. 42).
[32] Termín univerzální model je autorem dříve užívané označení generického modelu. Stejně tak jako označení separovaný model pro model izolovaný.

následující obrázek (obr. 3). Úkolem žáka je sledovat, kolik dřívek potřebuje pro stavby určitého počtu oken.



Obrázek 3: Trojúhelníková okna stavěná ze dřívek

Při řešení je žák nejprve zcela zaujat manipulační činností. Když ale začne evidovat počty dřívek a oken např. do tabulky, všimne si narůstání počtu všech použitých dřívek vždy o dvě s každým dalším oknem. Po tomto objevu již nepotřebuje okna dále stavět. Pro určení počtu dřívek každého dalšího okna přičte vždy dvě dřívka k počtu předchozímu. Na základě několika izolovaných modelů stavby oken tak vyvstává první model generický. Problém je však vyřešen zatím jen částečně. Pokud řešitelský proces pokračuje dále, žák postupně objeví přímý vztah mezi počtem oken a počtem dřívek.

Na tomto velice zjednodušeném příkladu řešení úlohy lze rozlišit dva typy generických modelů. V první fázi, kdy byl počet dřívek potřebných pro stavbu oken vyjádřen jako posloupnost čísel zvyšující se o dva, šlo o *generický model procesuální*. Když je pak ale vztah mezi počtem oken a počtem dřívek vyjádřen tak, že počet dřívek dostaneme vynásobením počtu oken dvěma a přičtením jedna, jde již o *generický model konceptuální* (Hejný, 2014). V případě generického modelu procesuálního je tedy pro výpočet hodnoty určitého členu posloupnosti nutné znát hodnotu členu předchozího. Zatímco u generického modelu konceptuálního je možné zjistit hodnotu jakéhokoli členu posloupnosti nezávisle na ostatních členech. (Např. tedy i tisícího členu, což by bylo u generického modelu procesuálního velice náročné.)

Kognitivní posun, kdy z komunity izolovaných modelů vzniká model generický, je označován jako **zdvih**. V tomto případě jde o *zdvih zobecněním*. K tomuto procesu dochází obvykle na základě tzv. AHA-efektu, tedy náhlému vhledu do společné podstaty daných izolovaných modelů. K dalšímu zdvihu pojmenovanému jako *abstrakční* pak dochází v procesu mezi generickými modely a abstraktním poznatkem (Hejný, 2014).

Ke čtvrté etapě poznávacího procesu, **abstraktnímu poznatku**, dochází na 1. stupni ZŠ jen zřídka. Snahou 1. stupně je pouze žáky na tuto etapu propedeuticky připravit. Utváření abstraktního poznatku je provázeno změnou jazyka. Obecnost je uchopena přímo pomocí písmen namísto čísel (Hejný, 2008a, 2014). U zmiňované úlohy s dřívky by šlo například o vyjádření počtu dřívek potřebných pro stavbu daného počtu oken jako *2n + 1*, kdy *n* je počet oken.

Jak bylo vidět na obrázku 2, souběžně s popisovanými etapami probíhá **krystalizace.** Ke krystalizaci dochází po objevení prvního generického a někdy i ve vyšších stádií izolovaných modelů. „Krystalizace je proces uhnízdění nového poznatku ve vědomí žáka [...] a jejím hlavním cílem je vytvořit dostatečně hustou síť vazeb mezi jednotlivými poznatky" (Hejný, 2014, s. 73). Seznamuje-li se žák se zlomky a poté s desetinnými čísly, leží zprvu tato schémata vedle sebe. Ke krystalizaci dochází v okamžiku, kdy se tato schémata začnou propojovat, když si žák uvědomí, že 1/2 = 0,5.

Teorie izolovaných a generických modelů je blízká teorii proceptů Graye a Talla. O rozdílu těchto teorií Hejný (2007) říká:

> Mezi teorií proceptu a teorií generického modelu jsou přinejmenším tři rozdíly. Generický model není vázán na znak, jak je tomu u proceptu, a procept není nástrojem na popis procesu zobecňování, jak je tomu u generického modelu. Navíc pro tvorbu generického modelu je potřebné poznávat i jiné typy izolovaných modelů (modely zdánlivé a modely překvapivé), ale u proceptu se tyto jevy neobjevují (Hejný, 2007, s. 84).

2.3.2. Generické modely jako pilíře utvářejících se schémat

Generické modely našeho poznání jsou pilíři schématu, které se začne tvořit, když se objeví první generický model.

> Dítě možná objeví, že součet 2 fotbalových míčů a 3 fotbalových míčů se rovná 5 fotbalových míčů, součet 2 a 3 panenek je 5 panenek, ale on/a ještě nemá vytvořené schéma pro sčítání malých čísel. Toto schéma se vytvoří, jakmile dítě objeví, že výpočet může být proveden počítáním na prstech, které se tímto stanou generickým modelem pro sčítání malých čísel (Hejný, 2008b, s. 47).

Zrod schémat je tedy vázán na objevení se prvního generického modelu. Tímto se teorie schémat Hejného liší od již zmiňované APOS teorie Dubinského, která do schématu zařazuje již první akce a procesy. Pojetí schémat u Hejného je tedy o něco užší, než je tomu v APOS teorii (Hejný, 2007).

Schéma lze chápat jako jakousi sít generických modelů a případně i izolovaných modelů dodaných dodatečně. Takovým izolovaným modelem dodaným dodatečně je například našikmo postavený čtverec ve čtverečkované síti. Tento čtverec vznikl dokreslením ze zadané úsečky ve čtverečkované síti, která představovala jednu jeho stranu. Doposud žáci pracovali jen s úsečkami, které byly vedeny mřížovými body vždy horizontálně nebo vertikálně. Nyní je ale tato úsečka zadána v jiném směru a žák je tedy nucen hledat jiný postup konstrukce čtverce, než byly ty všechny předchozí. Žák, který si ihned uvědomí, že další hledané strany čtverce jdou kolmo na danou stranu a snaží se je nějak sestrojit, má tento „šikmý“ čtverec již zařazen ve své představě generického modelu čtverce. Avšak pro žáka, který toto nevidí a hledá další strany čtverce spíše v horizontální nebo vertikální poloze, „šikmý“ čtverec ještě není součástí jeho generického modelu čtverce a vyřešení zmiňované úlohy představuje obohacení generického modelu o nový model izolovaný.

Na základě dalších zkušeností tak dochází k rozšíření předchozích schémat. I jednotlivá schémata se však navzájem prolínají a mají svou vnitřní architekturu.

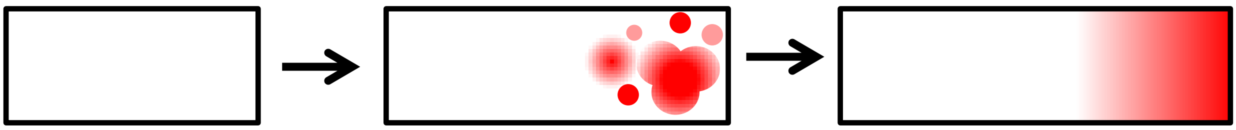
> Kvalitu schématu určuje v první řadě bohatost a různorodost jeho generických modelů. [...] Při řešení úloh týkajících se jistého schématu si řešitel obyčejně volí některý jeho generický model, a to ten, který dané situaci dobře vyhovuje. [...] Úlohy, které jsou pro žáky nesnadné, ukazují na nedostatečné vybudování příslušných generických modelů (Hejný, 2007, s. 87).

Pro utváření schématu a jeho další formování je rozhodující okamžik, kdy se objeví vnitřní rozpor. Ten se nejčastěji objeví s příchodem nového izolovaného modelu. Je to okamžik, kdy „například žák prvního ročníku zjistí, že polovina je číslo, nebo když žák čtvrtého ročníku objeví, že čtyřúhelník může být i nekonvexní. […] V praxi pak k objevení se vnitřního sporu dochází nejčastěji ve třídě v důsledku různosti názorů žáků“ (Hejný, 2014, s. 87).

2.4. Desémantizace matematických poznatků žáka

Zpracování této části vychází především z článku Hejný, Jirotková, Slezáková (2015) a z konzultací se školitelem. Pojem desémantizace je v článku chápán jako mentální proces probíhající ve vědomí žáka, který mění obsah vědomí, a to tak, že na začátku jsou jeho představy sémantické a na konci strukturální. Tento přechod není skokový, nýbrž jde o postupné rozšiřování žákových představ. Desémantizaci si však nelze představovat jako posun po úsečce od jejího jednoho konce, kde jsou sémantické představy, k druhému strukturálnímu konci. To, co probíhá v naší mysli, je složitý komplex procesů, které neprobíhají lineárně.

K přiblížení tohoto procesu proto lépe poslouží připodobnění k zabarvování obdélníku. Obdélník je nejprve celý bílý. Bílá barva reprezentuje sémantické představy. V průběhu desémantizace se bílý obdélník začne postupně zprava zabarvovat dočervena. Červená barva symbolizuje představy strukturální. Postupné začervenávání bílého obdélníku může probíhat tak, že se v něm objeví několik červených teček, které se stále více rozšiřují, anebo přibývají další a další červené tečky, které se nakonec propojí. Při tomto procesu však bílá plocha obdélníku nezaniká, naopak celý obdélník se prodlužuje tak, aby se do něj vešla i vznikající červená část (viz obr. 4). Bílá část (sémantické představy) tak pomáhá k vytvoření červené části (strukturální představy). V důsledku toho se původní obdélník prodlužuje a poznání žáků se prohlubuje a rozšiřuje.



Obrázek 4: Připodobnění průběhu desémantizace k zabarvování obdélníku

Příkladem je proces, jak se malé dítě začíná seznamovat s pojmem počet. „Dítě [zprvu] neví, co jsou tři, ale ví, co jsou tři prsty, tři jablka nebo tři bonbóny. Později, v důsledku abstrakce, se toto sémantické ukotvení matematických představ začíná obohacovat o představy a pojmy, které již na sémantice nejsou přímo závislé[33]“ (Hejný, Jirotková, Slezáková, 2015, s. 1).

[33] vlastní překlad; originál: „The child does not know what three is but knows what three fingers, apples or candies are. Later, in consequence to abstraction, this semantic anchoring of mathematical ideas is

Vzhledem k Teorii generického modelu souvisí desémantizace s prvním a druhým zdvihem směřujícím od sémantické zkušenosti žáka k abstraktnímu poznání. Přičemž „vytvořené abstraktní poznání není již závislé na výchozích sémantických představách a existuje samostatně[34]“ (Hejný, Jirotková, Slezáková, 2015, s. 3).

Kvalitu proběhlé desémantizace ovlivňuje množství různých izolovaných modelů, které žák poznal. Např. když starší sestra ukazuje svému mladšímu sourozenci, že součet 2 + 3 zjistí tak, že dá na hromádku dva kaštany a pak přidá ještě tři, je schopna pro strukturální znalost aditivního spoje vytvořit sémantický model. V tomto případě mluvíme o tzv. ***vratné desémantizaci***. Když se dívka jako malá učila dávat dohromady různé počty, poznala dostatečné množství sémantických modelů. Z nich si pak vytvořila abstraktní představu o číslech a pro provádění jednoduchých výpočtů už modely ukotvené v reálném životě dále nepotřebovala. V době, kdy sčítání ukazuje sourozenci, si nejspíše modely, které kdysi potřebovala používat, již nevybavuje, ale je schopna si je v případě potřeby vytvořit.

Jiná situace ale nastává, když např. po žákovi na druhém stupni ZŠ budeme chtít vysvětlit, jak provést součet 1/2 + 1/3. Velice často se stává, že i po výzvě - vysvětli to pro prvňáka - bude součet popisovat pouze jako algorytmus pro sčítání kmenových zlomků. Nepoužije žádný model, na kterém by vše mohl znázornit. Na otázku, proč se to dělá zrovna takto, řekne, že takhle se to člověk musí naučit, že je to takové pravidlo. V tomto případě jde o ***desémantizaci nevratnou***, protože žák se již nedokáže vrátit k sémantickým modelům a počítání se zlomky má spojené jen se souborem pravidel, které si musí pamatovat. „Jestliže proces desémantizace v důsledku tlaku na rychlý nácvik aditivních a později i multiplikativních spojů vytěsní z vědomí žáka sémantické vazby, mluvíme o desémantizaci nevratné, jejíž důsledkem je mechanická znalost dítěte“[35] (Hejný, Jirotková, Slezáková, 2015, s. 1). V případě, že žák získá hotový abstraktní poznatek zvenčí např. od učitele, o desémantizaci už není možné mluvit.

---

expanded by ideas and concepts that are not directly dependent on semantics“ (Hejný, Jirotková, Slezáková, 2015, s. 1)

[34] vlastní překlad; originál: „Once abstract knowledge is formed, it is no longer dependent on the initial semantic ideas and exists independently“ (Hejný, Jirotková, Slezáková, 2015, s. 3).

[35] vlastní překlad; originál: „If the process of desemantization ousts semantic links from a pupil’s mind as a result of too fast a drill of additive and later multiplicative structures, we speak of irreversible desemantization whose consequence is mechanical knowledge of a child“ (Hejný, Jirotková, Slezáková, 2015, s. 1).

Podobný jev, že žákům jsou předkládány poznatky ve finálním tvaru, je velice často analyzován i u dalších autorů. Nazýván je obvykle jako dekontextualizované učení (*decontextualized learning*). Když například žák již ovládá proces sčítání dvou zlomků a tento rozšíří na sčítání tří zlomků tak, že nejdříve sečte první dva a k jejich součtu přičte zlomek třetí, pak výsledný vzorec pro součet tří zlomků byl získán uvnitř struktury zlomků. Žák, který vzorec součtu tří zlomků takto chápe, má kontextualizované poznání. Žák, který se finální vzorec naučí jen jako hotový poznatek, má toto poznání dekontextualizované. Jak uvádí Brousseau (2002), zatímco matematici se snaží své objevy co možná nejvíce zobecnit, učitel musí jít opačných směrem. V poznatcích formulovaných matematiky již není zřejmá cesta, jak byly objeveny, a proto je úkolem učitele tyto dekontextualizované poznatky znovu upravit do takové podoby (znovu je kontextualizovat nebo podle Brusseaua rekontextualizovat je), aby žáci měli možnost se k dekontextualizaci sami dopracovat. Problémem, jak provést tuto úpravu hotových poznatků do podoby, kterou je možné vyučovat, se zabývá např. teorie didaktické transpozice (*didactic trasposition*) podle Chevallarda (1988).

Velice častou situací ve školách ale je, že se žáci seznamují s poznatky právě pouze v hotové podobě. V tomto případě, jak píše Goldin (2014), je potřeba pomoci žákovi tyto poznatky následně kontextualizovat a uvést je tak do kontaktu s předcházejícími životními a školními zkušenostmi žáka. Podobně jako je možné vylepšovat dekontextualizovaný poznatek, lze dodatečně vylepšovat i poznatek desémantizovaný. Pokud žák získal poznatky bez opory o sémantické modely, je možné toto sémantické kotvení vybudovávat dodatečně. Jev dekontextualizace je tak z tohoto hlediska blízký tomu, co bylo popsáno jako nevratná desémantizace, a jev kontextualizace je blízký změně z nevratné desémantizace na vratnou.

2.4.1. Kognitivní překážky v poznávání

Na cestě od sémantické zkušenosti ke strukturálně ukotvené znalosti může žák narazit na řadu kognitivních překážek, které na jedné straně této přeměně brání, ale na druhou stranu jsou velice důležité pro další poznání. Proto součástí popisu porozumění určitému pojmu, jak uvádí Sierpinska (1990), by vždy měl být i soupis těchto překážek.

Počátky používání pojmu kognitivní překážka (*epistemological obstacle*, někdy též *cognitive obstacle*) jsou spojeny s G. Bachelardem a obdobím konce 30. let. Od té doby se překážkami v poznávání jedince i společnosti zabývala celá řada autorů. Pro účely této práce zde však uvedu jen některé z nich, které považuji za důležité pro vysvětlení chápání pojmu kognitivní překážka (dále jen překážka) tak, jak je užíván v této práci.

Podle Novotné (2006a, s. 166) „překážku můžeme definovat jako soubor chyb vztahujících se k přechozím znalostem.“ Tyto chyby tedy vycházejí z našich předchozích zkušeností, které byly úspěšné. Nyní v nové situaci se ale ukazuje, že naše na zkušenostech ověřené a dříve fungující znalosti jsou chybné a již nepoužitelné (Brousseau, 2002). „Děláme věci určitým způsobem. Ale najednou objevíme, že je s touto znalostí něco špatně (tj. uvědomíme si překážku)“ (Sierpinska, 1990, s 28). Toto uvědomění má význam pro formování naší nové znalosti. Porozumění problému tedy často souvisí s překonáváním překážek. (Sierpinska, 1990).

Překonávání překážek a porozumění chápe Sierpinska (1990) jako téměř totožné. První chápe jako positiv a druhý jako negativ téhož obrazu. Přičemž vždy záleží jen na úhlu pohledu toho, kdo na něj pohlíží. Tento rozdíl mezi nimi vnímá v souvislosti s jejich pohledem do minulosti nebo budoucnosti. Zatímco porozumění směřuje vpřed k nové znalosti, překážky souvisí spíše s minulostí, s našimi minulými znalostmi.

Podle Brusseaua (2002) mají překážky vyskytující se při výuce tři různé zdroje:

ontogenetické (Souvisí s kognitivním vývojem jedince a jeho limitami v určitém jeho období.)

didaktické (Vyplývají ze způsobu vedení výuky učitelem.)

epistemologické (Tyto překážky jsou zásadní pro zformování další znalosti, protože přímo souvisejí s procesem nabývání znalosti.)

Jako příklad didaktické překážky Brousseau uvádí, že pokud jsou např. desetinná čísla zaváděna pouze ve spojení s metrickým systémem a s operacemi prováděnými s celými čísly, pak žáci chápou desetinná čísla jen jako čísla přirozená s desetinnou čárkou, která se používají jako míra a v souvislosti s převodem jednotek. Takováto představa o desetinných číslech se pak pro žáky stává překážkou pro jejich další použití mimo tyto kontexty, např. pro porozumění jejich propojení se zlomky.

Příklady ontogenetických nebo epistemologických překážek zde Brousseau neuvádí. Bohužel však ani v mých materiálech se mi nepodařilo nalézt příklady, pomocí nichž by se mi tyto dva typy původu překážek podařilo rozlišit. Osobně se domnívám, že zřejmě ani přesné rozlišení mezi těmito dvěma zdroji překážek nelze nalézt, protože vždy bude spíše zaležet na tom, jak se na daný jev bude pohlížet než na samotné vlastnosti jevu.

Znalost, která je překážkou pro vytvoření kvalitnější znalosti, je učiteli obvykle vnímána jako často se vyskytující chyba v souvislosti s určitým typem učiva nebo pojmem. Jak ukazuje Novotná (2006b), častou chybou je například, že žák napíše součin $0 \cdot 3 = 3$. Jak ale dále uvádí, nemusí se v tomto případě vždy jednat pouze o chybu ve výpočtu žáka, ale o překážku, která zatím žákovi brání provést součin správně. Tentýž žák může být totiž schopen správně vypočítat $3 \cdot 0 = 0$. Násobení $3 \cdot 0$ je pro něj výzvou, aby vzal nulu třikrát. Když třikrát přidá nulu, stále má nulu. V tomto případě je jeho úvaha správná. Přenese-li tuto myšlenku ale na opačný případ $0 \cdot 3$, dostane pokyn, vezmi nula krát trojku. V tomto pokynu však vnímá především trojku spolu s představou, že množství, které se má vzít, musí existovat. Tato úvaha však samozřejmě vede k chybné odpovědi.

Pomoc žákovi s překonáním překážky by měl učitel směřovat na přípravu nabídky situací, které budou vycházet z jeho počáteční znalosti, ale budou ji postupně konfrontovat (Brusseau, 2002). Jak ale uvádí také Novotná (2006b) nalézt univerzální způsob pomoci pro všechny žáky není možné.

2.5. Vyučování orientované na budování schémat (VOBS)

Edukační styl VOBS (anglicky *Scheme-oriented education*) byl původně vytvořen Vítem Hejným. Později pak byl rozpracován bratislavským i pražským týmem jeho syna Milana Hejného.

2.5.1. Parametry určující kvalitu poznávacího procesu žáka

Pro potřeby této práce jsou z těchto parametrů důležité následující čtyři:

1. Respektování zákonitostí, které jsou popsány v teorii generických modelů. Přitom důležité je zde především spektrum generickým modelů, které jsou obsahem schématu přirozeného čísla.
2. Sémantické ukotvení číselných představ v životní zkušenosti žáka.
3. Kognitivní a metakognitivní autonomie žáka propojená s jeho poznávacími potřebami.
4. Možnost sdílení žákových představ s představami spolužáků, tedy diskuze třídy. V úvahách práce je tento parametr tak významný, že je mu věnována samostatná část 2.6..

Teorie generických modelů popisuje poznávací proces, ale nevěnuje zvláštní pozornost častým jevům, kterými je tento proces narušen. Nejčastější a přitom nejhorší narušení představuje *formální poznání*, které je uloženo pouze v paměti žáka bez propojení na jeho životní a matematické zkušenosti a často i bez propojení na jakékoli další poznatky. Typickým příkladem je paměťový záznam vztahu mezi dráhou, časem a rychlostí uložený ve vědomí mnoha žáků ve třech oddělených vztazích jako $v = s / t$, $s = v \cdot t$, $t = s / v$.

Pokud je tedy učivo žákovi předkládáno pouze jako hotové poznatky v podobě definic, vzorců a nácviků standardních postupů, s největší pravděpodobností nedojde k porozumění učenému a tento předem připravený konkrétní poznatek bude uchopen pouze na základě memorování jako víceméně izolovaně uložený údaj do paměti. Nedojde tak k začlenění poznatku do sítě jiných poznatků a dá se předpokládat, že bude zřejmě opět brzy zapomenut.

> Typickým rysem nízké matematické kultury je neschopnost žáka postupovat vně nacvičených standardních procedur. Jeho řešitelskou meta-strategii lze popsat jednoduše: žák v předložené úloze nebo problému hledá prvek, k němuž má v paměti uloženou proceduru, kterou lze v dané situaci použít, když ji najde, tak ji aplikuje, když ji nenajde, rezignuje (Hejný, 2007, s. 90).

Tuto situaci popisuje v podobě deníkových záznamů i Holt.

> Předpokládám, že tomuto dítěti bylo aspoň tisíckrát, možná dvou tisíckrát, řečeno, že když přičítáš nějaké číslo k deseti, dostaneš odpověď tak, že napíšeš 1 a potom to číslo, které přičítáš. A přesto, když to tehdy objevila, zdálo se, jako kdyby to nikdy dříve neviděla ani neslyšela (Holt, 2003, s. 175).

Podle teorie VOBS poznatky, které si žák vytváří sám na základě své vlastní aktivní činnosti, se stanou součástí schémat a jsou pravděpodobně i trvalejší než poznatky převzaté. Kvalita matematického poznání žáka je tak dána kvalitou jeho matematických schémat.

Z toho důvodu není proto možné účel výuky matematiky omezit jen na pouhý soubor nácviků kalkulací a algoritmů, ale mělo by jít především o „skutečné matematické činnosti, jako je experimentování, spekulování, hledání, analyzování situace, diskutování o pojmech apod." (Hejný, 2007, s. 94). Obdobně se opět vyjadřuje i Holt.

> [...] Pokud si myslíme, že musíme děti „naučit" to, co škola nazývá „základní poznatky aritmetiky", například, že 3 + 4 = 7 nebo 5 x 4 = 20, lepší metodou je nechat je, aby objevily samy experimentováním [...] základní vlastnosti čísel. Tvrzení, že 3 + 2 = 5, je nejlépe chápat ne jako tvrzení o sčítání, které někdo vymyslel a které se lze naučit pouze nazpaměť, ale jako tvrzení o vlastnostech čísla 5 (Holt, 2003, s. 144).

Pro charakteristiku edukačního stylu VOBS je často využívána bohatá zásoba příběhů z praxe, na nichž jsou demonstrovány principy vedení výuky podle VOBS. Pokusila jsem se proto tento poměrně rozsáhlý popis VOBS shrnout do několika málo zásad, které se vztahují k práci, a to jak z pohledu získávání kvalitního poznání žáka, tak i z pohledu práce učitele (zařazeno dále do části 2.5.2.). Soupis těchto zásad proto není možné považovat za úplný. Mnohé z těchto zásad jsou také v úzké vazbě na tzv. Desatero konstruktivismu sestavené Hejným a Kuřinou (2009) (viz 2.1.).

<u>Zásady pro získání kvalitního poznání žáka</u>

1. Pro poznání je důležitá vlastní aktivita žáka, poznání si každý žák musí budovat sám.
2. Poznání je uloženo ve schématech. Schéma je dynamická mentální struktura. Ta je utvořena zejména sítí generických modelů, které vznikají zobecňováním modelů izolovaných.
3. Izolované i generické modely si žák tvoří řešením přiměřených úloh a následnou diskuzí o těchto úlohách se spolužáky.
4. Úloha je přiměřená, jestliže ji žák zvládne, ale musí k tomu vyvinout úsilí. Radost, kterou řešitel po vyřešení pociťuje, potvrzuje, že úloha byla přiměřená. Míra radosti odpovídá míře úsilí vynaloženého na řešení a motivační síle, která z tohoto procesu vzešla.
5. Žák, který si samostatně vytvořil alespoň jeden izolovaný model a pak generický model převzal od spolužáka, si může tento generický model osvojit. To znamená porozumět mu tak, že jej dokáže tvořivě použít. Takový model může nakonec žák i přijmout za svůj. To znamená porozumět mu tak, že má pocit, že jej sám objevil.

2.5.2. Interakce učitele a žáka ve VOBS

Učitel ve VOBS hraje při vyučování klíčovou roli. Učitel je ten, kdo „seznamuje žáky s adekvátními problémy a organizuje jejich diskuzi takovým způsobem, aby směřovala k požadovaným znalostem“[36] (Hejný, 2012, s. 47). Úkolem učitele je hledat optimální rozvoj matematických znalostí a dovedností žáka jako součást rozvoje žákovy osobnosti.

Roli učitele ve VOBS je možné také charakterizovat pomocí sady následujících zásad (upraveno podle Hejný, 2014 a komentářů k příběhům v publikacích Hejného). Ani tento soubor zásad nelze považovat za konečný. Opět jde o výběr těch zásad, které se opírají o analýzy dále uváděných zaprotokolovaných záznamů, případně o další analýzy prováděné při vzniku práce.

[36] vlastní překlad; originál: „It is the teacher who presents pupils with adequate problems and organises their discussion in such a way that it proceeds to the required knowledge“ (Hejný, 2012, s. 47).

Zásady pro práci učitele

1. Je citlivý k potřebám dítěte. Spoluprožívá s dítětem radost z jeho vnitřního rozvoje.

2. Zná zákonitosti vývoje dítěte / žáka a dokáže je účinně využívat k jeho intelektuálnímu rozvoji. Mírou úspěšnosti učitele je zde stupeň motivovanosti jeho žáků.

3. Nepoučuje, nepředkládá žádná matematická „moudra“, nevstupuje žákům do jejich úvah, chválí nápady a povzbuzuje ty, kteří povzbuzení potřebují.

4. Iniciuje a podporuje diskuze žáků o řešených problémech. Při moderování diskuze se nepřiklání k žádnému názoru a nechává na žácích, aby své argumenty posuzovali.

5. V procesu vyučování je jeho pozornost primárně zaměřena na sledování myšlenkových procesů žáků a pouze sekundárně na matematický obsah probíraného učiva.

6. Vede žáky k účelné práci s chybou.

7. Sám má chuť objevovat a zkušenostmi získanými z vlastních objevů se učí zvyšovat citlivost na přítomnost objevitelského procesu u svých žáků a správně na něj reagovat.

Podobně je role a činnost učitele zachycena i u Cachové a Stehlíkové pomocí pěti tezí popisujících podnětnou výuku jako vyučování, které zahrnuje prvky konstruktivistického přístupu.

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.

2. Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy) a vhodně s nimi pracuje.

3. Učiteli jde především o žákovu aktivní činnost.

4. Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci.

5. Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění spíše než na reprodukci odpovědi (Cachová, Stehlíková, 2006, s. 6).

Uvedených zásady neodpovídaly zcela představě uchopení zásad pro práci učitele ve VOBS, a proto i bylo vytvořeno předchozích sedm zásad, které jsou více operacionalistické a tedy pro charakteristiku interakce učitele a žáka ve VOBS vhodnější.

Interakci učitel - žák věnuje velkou pozornost i francouzský didaktik Brousseau, podle něhož (Brousseau, 2002) každý učitel jedná v různých situacích určitým způsobem a žáci jsou schopni způsob jeho reakce předvídat. A stejně tak i učitel očekává určité chování od svých žáků. Jde tedy o jakási nepsaná pravidla existující mezi nimi, která však nazpět ovlivňují jak práci učitele, tak i žáka. Tento jev Brousseau nazývá didaktický kontrakt a vymezuje jej jako soubor pravidel a strategií hry, podle nichž učitel a žáci jednají, aniž by byly vysloveny. Proto je i těžké tato pravidla a strategie přesně definovat. Nicméně jejich přítomnost je evidovatelná, a to především v okamžicích, kdy dojde k porušení didaktického kontraktu. K tomu dochází obvykle v případě, pokud se žáci nesetkávají s úlohami, které mají více než jedno řešení, nebo s úlohami, které nemají řešení žádné, a učitel jim najednou takovou úlohu zadá. Jako příklad je velice často udávána úloha o kapitánově věku. Ač tato úloha, „na lodi je 26 ovcí a 18 koz, jak starý je kapitán?“ (Brousseau, 2012, s. 49), nemá řešení, mnozí žáci odpověděli, že kapitánovi je 44 let. Na otázku, proč odpověděli zrovna takto, žáci sice připustili, že jim otázka připadala hloupá, ale byli přesvědčeni, že tuto odpověď učitel očekává (Brousseau, 2012).

V souvislosti s didaktickým kontraktem jsou uváděny ještě i některé další jevy jako např. tzv. Topazův jev. Topazův jev poukazuje, myslím, na běžné situace ve škole, kdy učitel, který chce pomoci chybujícími žákovi nebo chce naopak předejít neúspěšnosti připravené aktivity, dává žákům takové množství návodných kroků k nalezení správného řešení, že žáci pro jeho vyřešení nemusí vyvinout téměř žádné úsilí, protože učitel udělal všechnu práci za ně. (Brousseau, 2002, 2012; Novotná, Hošpesová, 2007).

2.5.3. Didaktická matematická prostředí

Termín Didaktické matematické prostředí (dále jen prostředí) formuloval Wittmann (2001) pod názvem *Substantial learning enviroment*. Prostředí poskytují série úloh různorodých jak obsahově, tak náročností, které jsou vloženy do určitých kontextů a umožňují odhalovat matematické pojmy i zákonitosti. Řešením provázaných úloh náležících určitému prostředí žák může objevovat hluboké matematické myšlenky. Tento proces může učitel ohrozit tím, že poskytne žákovi návod, jak tyto úlohy řešit.

Když žák místo vlastního hledání převezme od učitele nabídnutou pomoc, k objevu nedochází.

Didaktická matematická prostředí jsou tedy v této práci chápána jako

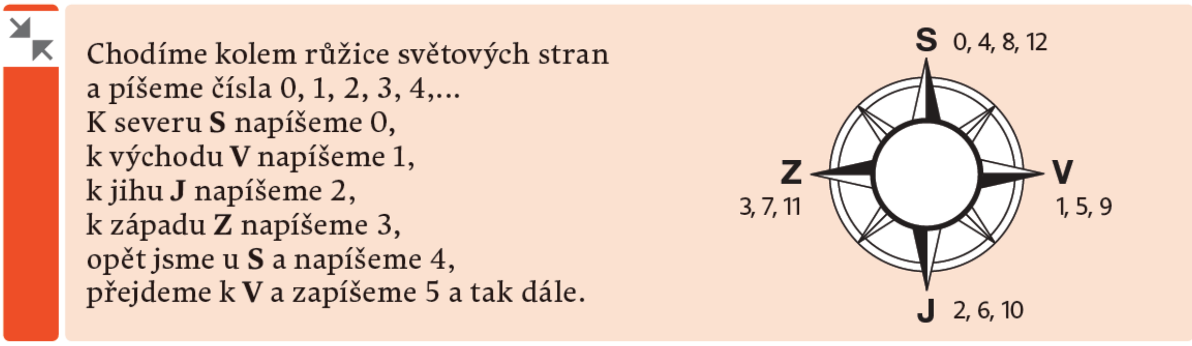
> soubor vzájemně propojených pojmů, vztahů, procesů a situací, který dovoluje tvořit úlohy:
> - umožňující žákům odhalovat hluboké matematické myšlenky
> - obdařené silným motivačním potenciálem
> - přiměřené žákům jak 1., tak i 2. stupně
> - s nastavitelnou obtížností (Hejný, 2014, s. 13).

Úlohy shlukované do prostředí využívá VOBS, protože řešení takto provázaných úloh více podporuje tvorbu mentálních schémat než řešení úloh řazených pouze tematicky. V současné době podporu pro učitele poskytuje řada učebnic od 1. do 5. ročníku nakladatelství Fraus vytvořená Hejným, Jirotkovou a dalšími autory (2007, 2008, 2009, 2010, 2011), která nabízí celou řadu prostředí jak aritmetických, tak geometrických. Některá z těchto prostředí jsou podrobně didakticky zpracována v dalších publikacích. Z aritmetických prostředí jde například o Krokování a Schody (Slezáková, 2006, 2007; Chaloupková, 2010), Autobus (Hejný, 2014), Děda Lesoň (Jirotková, 2006) nebo Součtový trojúhelník (Hejný, 2007; Stehlíková, 1999). Geometrická prostředí je možné najít především v publikacích Jirotkové, které jsou souhrnně zpracovány v její monografii (Jirotková, 2012).

Se zmiňovanými učebnicemi a tedy i s matematickými prostředími pracuje také zkoumaná třída. Zaprotokolovaná diskuze DII vychází z řešení úloh prostředí Směrová růžice. Z toho důvodu je toto prostředí představeno blíže.

Prostředí Směrová růžice

Směrová růžice (viz obr. 5) představuje vizualizaci a sémantickou reprezentaci aritmetiky modulo 4.



Chodíme kolem růžice světových stran
a píšeme čísla 0, 1, 2, 3, 4,...
K severu **S** napíšeme 0,
k východu **V** napíšeme 1,
k jihu **J** napíšeme 2,
k západu **Z** napíšeme 3,
opět jsme u **S** a napíšeme 4,
přejdeme k **V** a zapíšeme 5 a tak dále.

Obrázek 5: Prezentace prostředí Směrová růžice v učebnici pro 4. ročník ZŠ (Hejný, Jirotková, Bomerová, 2010, s. 74)

Jak je patrné již z představení prostředí v učebnici, které mají k dispozici i žáci, prostředí Směrová růžice je utvářeno ve vědomí žáka ve třech časových úrovních: koncept-proces-koncept.

1. *koncept*

Prvním konceptem je obrázek směrové růžice skládající se ze čtyř vrcholů (cípů): sever (S), východ (V), jih (J) a západ (Z).

2. *proces*

Kolem čtyř vrcholů růžice jsou postupně od severu, přes východ, jih, západ, sever atd. zapisována čísla od nuly po jedné (0, 1, 2, 3, 4, 5, …). Tento proces je chápán na úrovni reálné i imaginární, protože proces zapisování čísel je nekonečný. Reálná úroveň představuje proces skutečně zapisovaných čísel a na ní pak navazuje úroveň imaginární, kdy číslo sice napsané není, ale žák ví, že se umísťováním dalších čísel kolem růžice k němu dá dostat.

3. koncept

Procesem zapisování čísel kolem růžice vzniká další koncept, a to růžice s posloupnostmi čísel u každého ze svých čtyř vrcholů. Přičemž opět je zde nutné rozlišit čísla, která jsou u růžice skutečně napsaná a která jsou zapsaná jen potencionálně. Žák například nevidí na obrázku číslo 15, ale ukazováním si na jednotlivé vrcholy růžice je schopen se k němu dopočítat a ukázat k jakému vrcholu patří. Jiné je to ale například s číslem 2015, ke kterému se jen tak prstem nedopočítá. Přesto má žák intuitivní představu o tom, že u jednoho z vrcholů růžice má toto číslo své místo. K posunu z intuitivní úrovně pak dojde v okamžiku, kdy žák odhalí pravidlo o pozici jakéhokoli čísla podle zbytku při dělení čtyřmi.

Postupným zapisováním čísel kolem růžice vznikají mezi čísly u jejích vrcholů hned několikeré vazby, které žáci postupně objevují:

sudost a lichost čísel - Na severu a jihu růžice se hromadí pouze čísla sudá, na východě a západě čísla lichá. Zajímavým objevem pro žáky je také, že sudá čísla na jihu jsou všechna ta, která na severu schází, a stejné je to mezi lichými čísly na západě a východě.

násobky čtyř - Na severu růžice stojí násobky čtyř. U východu růžice jde již o násobky čtyř plus jedna. U jihu stojí násobky čtyř plus dva a u západu násobky čtyř plus tři. V případě západu se možná u žáků objeví i další intepretace, že jde o násobky čtyř mínus jedna.

aritmetické posloupnosti s diferencí 4 - U každého z vrcholů růžice je rozdíl dvou sousedních čísel čtyři.

zbytkové třídy - Po vydělení čísel na východě čtyřmi vyjde vždy zbytek jedna. Východ tedy představuje skupinu čísel zbytkové třídy 1, neboli čísla kongruentní 1 modulo 4. Stejně tak na jihu se objevují čísla zbytkové třídy 2 a na západě čísla zbytkové třídy 3. Didaktickým záměrem tohoto prostředí je tak i seznamování se s čistě strukturálními vztahy, tedy že čísla sudé + sudé = sudé, sudé + liché = liché a liché + liché = sudé. V učebnici jsou tyto vztahy uváděny pomocí písmen označujících jednotlivé vrcholy růžice S, V, J, Z, které jsou reprezentanty jednotlivých zbytkových tříd: S + J = J, S + V = V, V + V = J apod. Jinými slovy vezmu-li například číslo na severu a přičtu k němu číslo na východě, jejich součet bude ležet opět na východě.

Předchozí text představuje globální didaktickou analýzu, která vznikla se záměrem získat nad prostředím Směrová růžice určitý nadhled vzhledem k jednotlivým didaktickým prvkům, které se zde vyskytují, a určitým způsobem je strukturovat. Když ale sledujeme žáka při práci a například evidujeme, že udělal nějakou chybu nebo narazil na nějakou překážku, tak výše uvedený popis není dostatečně podrobný z hlediska procesů, které zde probíhají. Proto je vše dále uvedeno ještě jednou, a to z pohledu budování generického modelu prostředí Směrová růžice. Tento procesuální popis tak může pomoci učiteli například s lokalizací chyby, které se žák dopustil, a být tak vodítkem při pomoci v její nápravě.

Budování generického modelu prostředí Směrová růžice

Když žák postupně zapisuje čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5, … kolem směrové růžice, získává první zkušenosti s procesem „namotávání" číselné osy na kružnici. Zapsání prvních čtyř čísel lze vnímat jako první izolovaný model tohoto procesu. Zapsání další čtyř čísel jako druhý izolovaný model, atd. Po jisté době žák práci zastaví, protože na jedné straně mu je jasné, že tato činnost nemá konce, a na druhé straně již začíná nacházet pravidelnosti, které se zde vyskytují. Vedle procesuální zákonitosti

1. *Každý oběh obsahuje 4 čísla.*

se zde postupně objevují (ať již individuální prací žáka, nebo jeho komunikací se spolužáky) dílčí poznatky konceptuálního charakteru:

2. *Všechna čísla u severu jsou sudá,*
3. *jsou to násobky 4.*
4. *Také u jihu jsou čísla sudá,*
5. *jsou to ta, která u severu schází.*
6. *Čísla u severu a u jihu do sebe zapadají jako dva hřebeny.*
7. *U východu a u západu jsou lichá čísla*
8. *a i tyto dvě řady čísel do sebe zapadají, jako tomu bylo u severu a jihu.*
9. *Rozestup sousedních čísel u východu je 4, stejně tak je to i u jihu a u západu.*
10. *Součet kteréhokoli čísla ze severu s kterýmkoli číslem z východu, dá pokaždé číslo z východu*[37]*. Tento vztah lze napsat S + V = V. Stejně tak platí S + J = J a S + Z = Z. Sever tedy působí jako nula (jako neutrální prvek).*
11. *Operace sčítání se dá použít pro všechny čtyři prvky S, V, J a Z, jak ukazuje tabulka.*[38]

+	**S**	**V**	**J**	**Z**
S	S	V	J	Z
V	V	J	Z	S
J	J	Z	S	V
Z	Z	S	V	J

Obrázek 6: Sčítací tabulka čtyř prvků S, V, J, a Z v modulární aritmetice

[37] Úlohy tohoto typu lze najít v učebnici Hejný, Jirotková, Bomerová (2010) na straně 75 ve cvičení 20, dále na straně 77 ve cvičení 5 a na straně 80 ve cvičení 19.

[38] Žáci se setkávají s novým typem tabulky pro sčítání. Na 2. stupni ZŠ mohou pak žáci dále odhalit, že stejně tak jde pracovat i s operací násobení. Zde se však objevuje něco, co v běžné aritmetice nenacházíme. Platí, že J · J = S, tedy když dáme číslo na druhou, dostaneme nulu (neutrální prvek). Mezi dalšími odhaleními je, že při sčítání a násobení platí komutativní a asociativní zákon a v propojení sčítání a násobení zákon distributivní.

Ve vědomí různých žáků se objevují různá seskupení těchto a dalších podobných (někdy i nepravdivých) poznatků. Soubor těchto poznatků vytváří první žákův generický model čtyřcípé směrové růžice. Je to model procesuální, protože se týká pouze malých čísel a vědomí, že zapisování čísel lze libovolně prodlužovat. Odhalení pravidla, jak u velkého čísla (např. 2015) určit, ke kterému z vrcholů růžice patří, změní stávající procesuální generický model na model konceptuální.

Průvodním jevem procesu budování popsaného generického modelu je krystalizace. Výše uvedená zákonitost 1. je propojena na rytmus, zákonitost 2. na dobrou představu sudého čísla, zákonitost 3. na násobilku čtyř, atd.

Při sledování popsané práce žáků je vidět, jakou zásadní roli pro proces poznávání hraje diskuze třídy. Při sdílení svých postřehů se objevy jednoho žáka stávají impulsem pro objevy dalšího žáka. Jeden zjistí, že u severu jsou násobky čísla 4 a jiný už přemýšlí, jestli i u ostatních vrcholů nejde o násobky nějakých čísel. Vysloví hypotézu a další mu ji vyvrátí. Takto postupně se třída společně dopracovává až k odhalení zbytkových tříd. Každý vytvořený poznatek je přitom propojen i na další poznatky a zkušenosti, které s růžicí ani nemusejí souviset.

Vytvořený generický model směrové růžice je sémanticky reprezentován pomocí jejích čtyř vrcholů označených S, V, J, Z. Sémantické kotvení může ale znamenat kognitivní překážku pro změnu čtyřcípé růžice na růžici s pěti i více vrcholy. Pro překonání této překážky si žák musí nejprve uvědomit, že nezáleží na označení jednotlivých vrcholů, ale pouze na jejich počtu. Tzn. dítě, které začne uvažovat o růžici s jiným počtem vrcholů, než jsou čtyři, muselo již tuto překážku překonat.

Při odhalení možnosti měnit počet vrcholů růžice dochází k tomu, že se vytvořený generický model pro čtyřcípou růžici stává izolovaným modelem pro růžici vícecípou. Přičemž zkušenosti s čísly u růžice se čtyřmi vrcholy pak žák na základě analogie porovnává s čísly stojícími u další růžice, např. u pěticípé. Zjišťuje tak například, že vzdálenost mezi sousedními čísly u jednotlivých vrcholů se rozšiřuje na pět a i zbytkové třídy se chovají obdobně jako u čtyřcípé růžice. Jiné je to však se sudostí a lichostí čísel. Nyní již neplatí, že na severu jsou pouze čísla sudá, ale shlukují se zde jak čísla sudá, tak i lichá. Toto shlukování však není náhodné, nýbrž jde o pravidelné střídání sudé číslo, liché číslo, sudé, liché atd.

2.6. Diskuze ve třídě mezi žáky

Pojem diskuze je obecně definován jako „komunikační akt, při němž dochází k výměně názorů mezi účastníky“ (Průcha, Mareš, Walterová, 2013). Zde se však zaměřím pouze na její užší vymezení, tedy pouze na diskuzi, která probíhá ve třídě mezi žáky při hromadném vyučování.

Diskuze mezi žáky ve třídě představuje významnou podporu procesu poznávání žáků, a proto i podněcování žáků k diskutování o problémech je důležitou úlohou učitele (viz zásada pro práci učitele č. 4, str. 46). „Pro VOBS je důležitá intelektuální autonomie žáka ve smyslu, že objevuje nové myšlenky nebo na ně přichází komunikací se spolužáky či je přebírá od spolužáků[39]“ (Hejný, 2012, s. 47).

Vymezení chápání diskuze ve třídě se u různých autorů více či méně odlišuje a někdy je též spojováno či nahrazováno výrazy komunikace, interakce, dialog anebo jinou další terminologií. Některé z těchto myšlenek přináší i následující text.

Diskuze probíhající ve třídě je považována za součást pedagogické komunikace. Pedagogickou komunikaci Mareš, Křivohlavý (1995) chápou jako zvláštní případ sociální komunikace, „která sleduje pedagogické cíle, pomáhá vychovávat a vzdělávat“ (Mareš, Křivohlavý, 1995, s. 24). Jak dále autoři uvádějí, v hromadném vyučování probíhá nejčastěji tato komunikace mezi učitelem a žákem (žáky). Pro rozpoutání diskuze je však potřeba, aby došlo k obousměrné komunikaci mezi žáky. Tuto komunikační strukturu Mareš a Křivohlavý nazývají jako *rozprava ve třídě.* Při zvažování možných úskalí této komunikační struktury při frontálním vyučování uvádějí hned několik faktorů[40], kdy učitel:

- podceňuje přípravu[41]
- pojímá rozhovor se žáky (mezi žáky) málo adaptivně
- neumí naladit atmosféru
- nedokáže správně naformulovat své otázky[42]
- neumí průběh vhodně řídit

[39] vlastní překlad; originál: „For scheme-oriented education, it is necessary that a pupil is intellectually autonomous in the sense that he/she discovers new ideas or gets to them by communicating with classmates or takes them over from the classmates“ (Hejný, 2012, s. 47).
[40] Použito a upraveno z Mareš, Křivohlavý (1995, s. 41 a 43).
[41] K tomuto bodu bych ráda doplnila vlastní zkušenost, že i když učitel v případě plánované diskuze přípravu nepodcení, může se stát, že bude myšlenkami žáků zaskočen, protože je při přípravě vyučování nepředpokládal.
[42] Souvisí s prvním komentovaným bodem. Pokud učitel diskuzi žáků nepředpokládal, hůře se mu rychle hledají správné formulace otázek.

- neumí vyvolat diskuzi
- nerozvíjí u žáků komunikativní dovednosti
- nedokáže diskuzi uzavřít

Diskuze může výrazně aktivizovat činnost žáků, avšak některé reakce učitele ji mohou zásadně utlumovat, např. když učitel:

- dává žákovi příliš návodů, jak problém řešit
- předčasně naznačí nebo dokonce prozradí výsledek
- ihned poukazuje na chybu žáka a nenechá jej nebo třídu chybu samostatně odhalit
- nedává žákům dostatek času a prostoru pro přemýšlení a diskuzi
- vede žáky k používání jedné strategie řešení, kterou považuje on sám za nejvhodnější (zpravidla tu nejrychlejší a časově nejúspornější) a neumožní tak strategie společně odhalovat, posuzovat a individuálně si mezi nimi vybírat. (Inspirováno a doplněno dle Stehlíková, 2006, s. 34).

Ne každý mluvní projev žáků, i když se vztahuje k výuce nebo probíranému tématu, je však možné za diskuzi považovat. Šeďová, Švaříček a Šalamounová (2012) proto mluví o tzv. *tematické diskuzi*, kterou definují jako „komunikační formu, v níž na sebe minimálně tři účastníci vzájemně reagují nejméně 30 sekund. Tématická diskuze je vždy vztažena k probírané látce, netýká se organizačních záležitostí či žákovských ‚odboček od tématu' " (Šeďová, Švaříček, Šalamounová, 2012, s. 171). A právě vzájemné reagování, které se zakládá na vzájemném naslouchání, považuji za nepostradatelnou součást smysluplné diskuze mezi žáky.

Důležitým předpokladem, aby vůbec k nějaké diskuzi mohlo dojít, je ponechání prostoru pro žáky mluvit. Jak ukazují výzkumy (Gavora, 2005; Mareš, Křivohlavý, 1995), bývá právě toto v tradiční výuce hlavní problém, protože učitel je tím, kdo v hodině převážně mluví. Pro možnost rozpoutání diskuze mezi žáky je tedy zapotřebí upozadění učitele. Tento jev Brousseau nazývá jako a-didaktická situace, jejíž základem je přenesení odpovědnosti za učení na žáka (Brousseau, 2002; Novotná, 2006b). Jak uvádí Gavora (2005), učitel v tomto případě jen předloží problém pro diskuzi nebo nechá prodiskutovat otázku iniciovanou samotnými žáky. Diskuze pak převážně probíhá již jen mezi žáky a učitel ji případně pouze jemně usměrňuje. „Při diskuzi [proto] vládne obyčejně živější a uvolněnější atmosféra, je větší hluk, dokonce i pohyb žáků po třídě. To je však cena za zvýšenou aktivitu žáků“ (Gavora, 2005, s. 94). Tuto komunikační strukturu Gavora označuje jako *dialog žák-žák* a chápe jej jako „účinný nástroj ke zvýšení zájmu žáků o vyučování, k přiblížení obsahu vyučování zájmům žáků. Dává žákům více možností aktivně se projevit, než je tomu při tradičním frontálním vyučování“ (Gavora, 2005, s. 94).

Význam diskuze při učení žáků vyzdvihuje také např. Fisher (2011), který ji považuje za jeden z deseti bodů důležitých pro strategii výuky vedoucí k rozvoji schopnosti myslet a učit se. Diskuze podle něj „označuje určitou formu skupinové interakce, kde se členové postupně vyjadřují k otázce, která se jich všech týká, a vyměňují si různé názory ve snaze této věci lépe porozumět“ (Fisher, 2012, s. 62). Tuto výměnu názorů, představ, myšlenek je možné chápat jako dvousměrný proces, který Hejný, Kuřina (2009) a Hejný (2014) charakterizují slovy uchopování, interpretace a artikulace. Artikulací žák formuluje své myšlenky jako informaci, kterou když jiný žák (příjemce) opět zpracuje na představu, dojde k její interpretaci. O uchopení se pak jedná v tom případě, když dojde i k propojení informace na některé jiné představy již uložené ve vědomí. Pokud k tomuto propojení nedojde, jde pouze o uložení informace. Žák tedy informaci uchopil (přijal a zpracoval) v případě, že:

a) zařadil ji do příslušné části vědomí k dalším podobným paměťovým záznamům,
b) propojil ji na některé představy již ve vědomí existující, a dokonce
c) obohatil ji o objev, konstrukci nové znalosti (Hejný, Kuřina, 2009, s. 122).

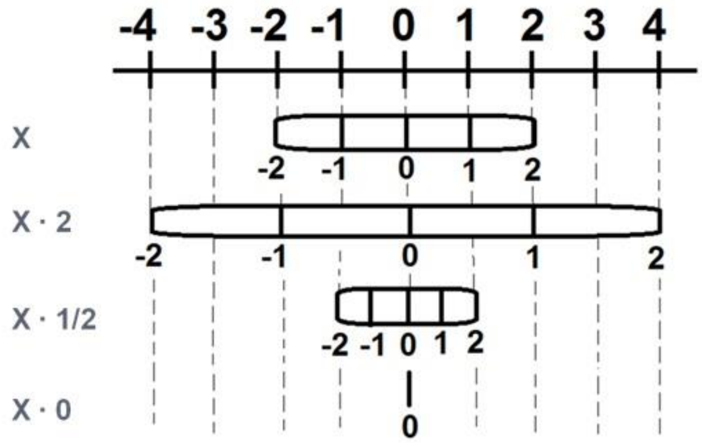
Podle Rittenhouse (1998) a David, Lopes (2002) je role učitele v diskuzi žáků dvojí: je účastníkem (*participant / stepping in*) a komentátorem (*commentator / organizer / stepping out*). V roli účastníka učitelka „poslouchá myšlenky studentů a ptá se, když plně nerozumí tomu, co se studenti pokoušejí říct. Přispívá tak do diskuze a stejně tak poskytuje vhled založený na svých matematických znalostech“[43] (Rittenhouse, 1998, s. 173). I když i ve VOBS učitel v diskuzi žáků též vystupuje v roli účastníka, dle VOBS ale učitel nemusí vždy všemu, co se odehrává v daném okamžiku, rozumět. Důležité je, když si rozumí žáci mezi sebou. Učitel tedy nepřerušuje tok žákovské diskuze, když ztrácí přehled, ale vyčká a případně si poté dodatečně nechá diskutované myšlenky žáky vyložit.

[43] vlastní překlad; originál: „ She listened to students´ ideas and asked questions about those ideas when she did not fully understand what a student was trying to say. She contributed to discussions and provided insights based on her own mathematical knowledge as well“ (Rittenhouse, 1998, s. 173).

V roli komentátora podle zmiňovaných autorů učitelka komentuje průběh i výsledek diskuze, přičemž se snaží předávat pravidla a normy, které s daným tématem souvisejí a které chce, aby žáci používali. Zachycení učitele jako komentátora, které je i bližší pojetí role učitele v diskuzi žáků ve VOBS, však podle mého přesněji vystihuje charakteristika Novotné. „Učitel nerozhoduje o správnosti, ale pomáhá žákům naučit se vysvětlovat, používat a přijímat legitimní argumenty, obhájit řádně svá tvrzení a formulovat i přijímat objektivní kritiku“ (Novotná, Tejkalová, 2012, s. 42).

3. Kognitivní problém nuly[44]

Nula je zvláštní číslo. Když řekneme, že máme pět lízátek, je to jasné. Řekneme-li, že jich máme nula, nemáme vlastně žádné. Sečteme-li nekonečně mnoho nul, dostaneme zase nulu. Když přičteme nebo odečteme od daného čísla nulu, je to jako, kdybychom vůbec nic neudělali. Ještě horší je to u násobení. Seife (2005) přirovnává násobení a dělení k napínání nebo naopak povolování pásku (viz obr. 7).



Obrázek 7: Násobení čísel jako napínání nebo povolování pásku

Vynásobíme-li něco dvakrát, pásek se nám dvakrát prodlouží. Vynásobíme-li jednou polovinou, pásek se uvolní a jeho délka se dvakrát zmenší. Násobíme-li ale nulou, napínaný pásek přestane fungovat. Smrští se do jediného bodu, protože cokoli násobené nulou, je zase jen nula. No a co teprve dělení? Pokud se nám v prvním případě při násobení dvěma, délka pásku dvakrát prodloužila, při zpětném dělení dvěma se opět dostáváme k původní délce pásku. Mělo by tedy i platit, že pásek smrštěný do bodu nula by se měl po dělení nulou znovu roztáhnout do původní délky. Zde je již ale vidět, že se nula zcela vymyká pravidlům ostatních čísel a že dělit nulou nemá vůbec smysl. A tak „zatímco násobení nulou boří číselnou osu, dělení nulou ničí celý rámec matematiky“ (Seife, 2005, s. 32).

Díky těmto vlastnostem nula způsobovala nemalé obtíže i v historii matematiky a vlastně díky nim trvalo západním kulturám tisíce let, než nulu přijaly mezi ostatní čísla.

[44] Text byl publikován v příspěvku ve sborníku konference Dva dny s didaktikou matematiky 2013 (Peclinovská, 2013, s. 73).

3.1. Nula v historii matematiky[45]

První zmínky o nule jsou spjaty s Babylonskou říší, kde její zavedení vycházelo z potřeb vyvíjející se poziční číselné soustavy. Babyloňané používali šedesátkovou číselnou soustavu. Pro účely astronomie tuto početní soustavu přijali také Řekové, a proto dnes hodinu rozdělujeme na šedesát minut a ty zase na šedesát sekund. Oproti řeckému systému však Babyloňané nepoužívali jeden symbol pro označení pouze jednoho čísla. A tak například jednoduchý klín mohl znamenat 1, 60 ale i 3600 podle toho, na jaké pozici stál na počítací pomůcce, kterou lze připodobnit k současným dětským počítadlům. Při zápisu čísel ale tato pozice nebyla zcela zřejmá, a tak byl vytvořen nový znak, dva šikmé klíny, který zastupoval prázdné místo počítací tabulky (viz obr. 8).

Obrázek 8: Vývoj zápisu čísel v Babylonské říši

V Babylonské říši tedy nula nepředstavovala žádnou numerickou hodnotu, ale její funkce byla spíše pro upřesnění pozice symbolů. Vzpomeňme si ale, že takto někdy používáme nulu i dnes. Stačí se podívat na telefon nebo klávesnici počítače, kde nula je nelogicky řazena až za devítku.

Nula se objevila i u několika dalších civilizací, které nezávisle na sobě také využívaly poziční číselné soustavy. Tak například Mayové žijící na území střední Ameriky používali dvacítkovou číselnou soustavu a nula, kterou zapisovali symbolem tvaru mušle, sloužila stejně jako v Babyloně pro označení mezery na dané číselné pozici. Je ale zajímavé, že v mayském kalendáři začínalo počítání dní nezvykle od nuly. Den v měsíci, který my tedy považujeme za první, byl v mayském kalendáři označen jako druhý.

I když se nula v pozičních soustavách začala postupně objevovat, stále nebyla chápána jako nic, jako výsledek rozdílu stejných čísel. Průlom přinesl až indický

[45] Text této části je zpracován podle publikací Barrow (2000), M. Mareš (2011) a Seife (2005). Zároveň je též doplněním vlastního již publikovaného příspěvku ve sborníku (Peclinovská, 2013).

matematik Brahmagupta (596 – 668 nebo 598 – 670), který „matematikům dal nulu – ne tu poziční, která nebyla nic jiného než značka [...] [pro] volné místo, ale tu pravou – číslo, které znamená nic.“ (M. Mareš, 2011, s. 93) A dokonce vytvořil i dodnes platná pravidla pro počítání s kladnými, ale i zápornými čísly a nulou. Indická početní soustava ovlivnila mnoho dalších početních soustav a mimo jiné i arabskou, která byla později přijata také v Evropě. (Např. ač se v arabském písmu čte obráceně zprava doleva, na základě indického vlivu u čtení čísel se jde zleva doprava.)

Než byla ale nula přijata i v Evropě, trvalo to ještě řadu dalších století. Přitom absence nuly často velice komplikovala výpočty. Tak tomu bylo například ve starověkém Řecku. Řecká kultura nebyla i přes svou vyspělost ochotna nulu přijmout. Snad tomu bylo proto, že nula jako nic byla vždy spojována s prázdnotou a „základním pilířem celého starořeckého vesmíru byla jistota, že prázdnota neexistuje“ (Seife, 2005, s. 33). Snad pro její vlastnosti, které se neslučovaly s geometrickým chápáním čísel. Řekové nepoužívali poziční číselnou soustavu, proto nulu ani neměli zařazenou mezi čísly. Přesto ji ale znali od Babyloňanů, a to díky astronomii, kterou Řekové milovali a Babyloňané v ní byli mistři. I když počítání bez ní bylo často velice obtížné, používali ji jen v nejnutnějších případech. A po provedení výpočtů v babylonském systému pak stejně údaje složitě převáděli zpět do řecké číselné soustavy, ve které nula obsažena nebyla.

Rozšiřování používání nuly v Evropě je datováno až na začátek 13. století a je především spjato s významným středověkým matematikem Fibonnacim (1170 – 1250). Fibonnaci se jako syn italského obchodníka na svých cestách seznámil s arabskými číslicemi a naučil se pracovat i s nulou. Své poznatky sepsal v knize Liber abaci (1202), která oslovila především italské obchodníky a bankéře. Ti velice vítali zjednodušení složitých výpočtů použitím arabské číselné soustavy. Italská vláda však zprvu arabské číslice odmítala a ve Florencii byl dokonce v roce 1299 vydán zákon, který nepovoloval používat v oficiálních dokumentech jiné číslice než římské, a to z důvodu obavy z podvodů (např. arabská nula lze snadno přepsat na šestku nebo devítku a hlavně připsání další číslice k číslu výrazně zvýší číslo stávající). Náhlé usnadnění výpočtů prostřednictvím arabských čísel bez zdlouhavé práce na počítacích destičkách však bylo natolik lákavé, že se přesto arabský zápis čísel postupně rozšířil.

Protože se nula spojovala s prázdnotou, vakuem, za úplné přijetí nuly v západním světě lze považovat až důkaz existence vakua, který provedl Blaise

Pascal (1623-1662). I přesto však problémy s nulou neskončily. Nula tak např. působila ještě nesnáze při zavádění diferenciálního a integrálního počtu u Leibnitze a Newtona.

Dnes je již nula považována za samozřejmou součást našeho života. Přesto je ale stále opředena jistou magičností. Vždyť proč prožíváme 10, 20, 30, tzv. kulaté narozeniny, více než ty ostatní? Proč autoři vědecko-fantastické literatury volili rok 2000 jako dobu, kam umístili létající auta, fantazijní vynálezy a lidi připomínající spíše stroje? A vzpomeneme-li rok 2000, tak právě obava z nuly, nazvaná jako Chyba roku 2000, nám připomene, že nula dokáže potrápit i současný svět.

3.2. Nula v didaktice matematiky

Předchozí příklady z historie matematiky jsou jen malým zrnkem na dlouhé a často velmi náročné cestě přítomnosti nuly v naší historii. Z fylogeneze tedy víme, že pojem nuly je velice obtížný. Nula náleží ale také k velmi problematickým didaktickým pojmům, a to nejen na 1. stupni základní školy. V mnoha obtížích žáků při osvojování pojmu nula lze tak spatřovat paralelu mezi fylogenezí a ontogenezí utváření matematických představ. Domnívám se proto, že i jen okrajové znalosti o tom, jak se postupně vyvíjely matematické představy lidí, mohou napomoci snaze porozumět utváření představ našich žáků. Obdobné obtíže, kterými si procházeli naši předci v historii matematiky, musí totiž mnohdy překonávat i žáci v průběhu svého vzdělávání.

V současné době se s nulou žáci setkávají od počátku školní docházky. Poznávají její symbolický zápis, její funkci v zápisu s ostatními číslicemi, utvářejí si představu o její hodnotě a postavení mezi ostatními čísly. Bohužel většinou je pojem nuly spojován pouze s formálními znalostmi ve formě pouček postrádajících odpověď na otázku proč. Přitom právě správná představa pojmu nula, jak uvádí V. Hejný (2012) může ovlivnit chápání i ostatních čísel a početních operací s nimi.

Jednou z pouček, se kterou se žáci setkají již na 1. stupni základní školy, je, že „nulou se nesmí dělit“[46]. Nemožnost dělit nulou je žákům často předkládána jako pravidlo či vžitá konvence bez matematického zdůvodnění. Přijetí tohoto pravidla

---

[46] Uvádím přesné znění poučky v podobě, která byla vštípena mně. Už v samotném znění této poučky je patrná tendence k formálnímu přijetí tohoto výroku žákem. Slovo „nesmí“ poukazuje více než jen na nesmyslnost provádění operace dělení nulou, ale zdůrazňuje i chápání této operace jako něčeho zapovězeného, co se bude případně i trestat.

nebrání žákům při úspěšném řešení úloh, ale formálnost této znalosti může vést např. po určité době k zapomenutí tohoto pravidla (Žalská, 2012). Na tento problém poukazuje i výzkum Tsamir a Sheffer (2000). Při řešení úloh směřujících k dělení nuly (např. úlohy typu 12:0, 14/0) v průměru 26 % sledovaných žáků 2. stupně základní školy o nedefinovatelnosti této početní operace vůbec neuvažovalo. Tito řešitelé pak nesprávně jako výsledek po dělení nulou nejčastěji uváděli nulu, hodnotu dělence nebo v několika případech i nekonečno.

Jedním ze způsobů jak v rámci prvního stupně uchopit nesmyslnost dělení nulou je využití inverzních operací dobře vizualizovatelných pomocí napínání a povolování pásku (viz výše obr. 7). Pokud 5 · 0 = 0, muselo by platit, že 0 : 0 = 5. Stejně tak by ale muselo platit 0 : 0 = 7, 0 : 0 = -2 atd., což je nesmysl. Pomocí sémantické představy dělení jako rozdělování celku na určitý počet částí, je pak nemožnost provedení této operace patrná již v samotném pokynu – rozděl na nula částí.

Dalšími didakticky velmi obtížně uchopitelnými problémy s nulou, které však již přesahují učivo 1. stupně základní školy, je výraz 0^0 (tomuto problému se věnuje Semadeni, 2006) a později 0!. Mají (nemají) oba tyto případy smysl a v případě, že mají, je jejich hodnota 0, nebo 1 anebo něco jiného? Dále pak v souvislosti s vektorovými prostory se nula objevuje v novém kontextu jako nulový vektor. Pokud je vektor chápán jako posunutí, pak nulový vektor je žádné posunutí. Zde je patrná i proměna vyjádření v jazyce. Nula v kontextu vektorů je nulové posunutí. U čísel říkáme přidat tři, přidat dvacet, ale v případě nuly řekneme nepřidat nic. V rámci množin, když vezmeme dvě množiny, které nemají nic společného, řekneme, že se protínají v prázdné množině. Nula je tedy množina, která nemá žádný prvek.

3.3. Řešení problému nuly v diskuzi třídy

Sledování, jak se žáci zabývají nulou, se opírá o dva pořízené záznamy DI a DII ze 4. ročníku základní školy (protokoly DI a DII viz přílohy). Hlavní otázkou, kterou v nich žáci řeší, je, zda lze nulu přiřadit k číslům sudým. Při odhalování strukturální povahy součtů sudých a lichých čísel se totiž ukázalo, že ne všichni žáci jsou v případě nuly o její sudosti přesvědčeni. Do této doby za sudé považovali pouze to číslo, které bylo možné rozdělit na součet dvou stejných čísel. Možnost takto rozdělit i nulu se však ukázala jako problematická.

Kromě otázky, jestli je nula sudá, vyvstalo v diskuzi třídy (především v DI) ještě několik dalších otázek týkajících se nuly. Vzhledem k rozsáhlosti protokolů obou diskuzí jsou proto vstupy žáků rozčleněny právě podle otázek, k nimž se vztahují. Pozornost je přitom soustředěna především na následující otázky:

Je nula sudá? (viz kap. 4.)

Jde nula rozdělit? (viz část 5.1.*)*

Je nula číslo? (viz část 5.2.)

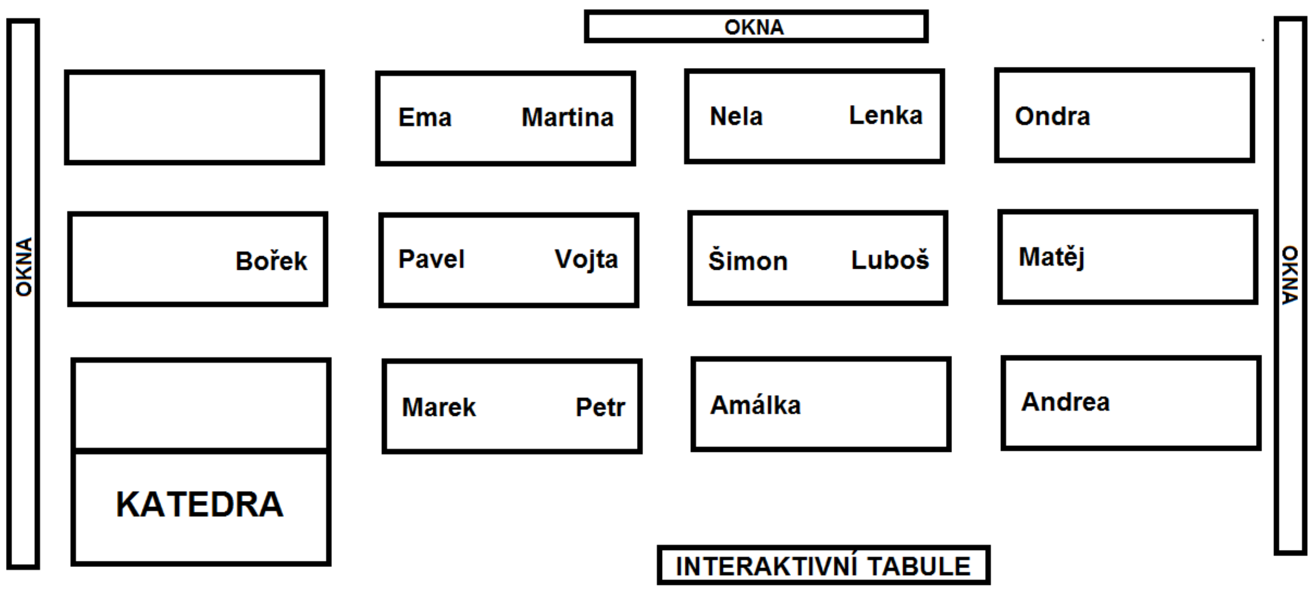
Kromě těchto otázek jsou v části 5.3. jen okrajově zmíněny vstupy žáků vztahující se k problému, jestli je možné dělit nulou, a ke vztahu nuly a nekonečna.

3.3.1. Obecné informace k diskuzím DI a DII

Informace o záznamu DI

Záznam diskuze byl pořízen na **diktafon** dne **27. 3. 2012** ve **4. ročníku**. V DI bylo přítomno **15 žáků** (6 dívek a 9 chlapců). Chyběla pouze Klára. Nahrávání proběhlo bez přítomnosti cizí osoby.

Následující schéma zachycuje zasedací pořádek žáků v okamžiku pořízení záznamu.

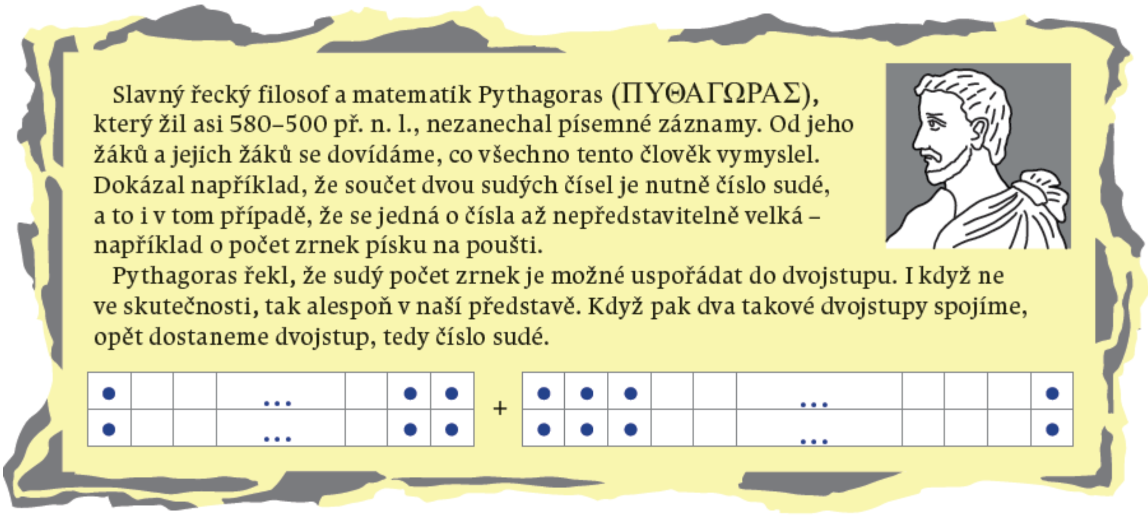


Obrázek 9: Schéma třídy v DI

Protokol DI (viz Příloha 1) zachycuje velice bouřlivou diskuzi, jejíž úplný začátek není na záznamu bohužel zachycen. Diskuze totiž vyvstala velmi rychle a pro mě zcela nečekaně. Kamera nebyla tentokrát připravena, a tak jsem na svém stole spustila alespoň nahrávání na diktafon. Než jsem ale diktafon stihla vyndat a pustit, žáci mezitím již pár minut diskutovali. Proto se nyní na následujících řádcích pokusím popsat činnost, která DI předcházela, a i těch několik minut chybějících v záznamu.

Činnost předcházející DI *(výňatek z pedagogického deníku)*

Nejprve jsme ověřovali, jestli platí, že součet dvou lichých čísel je číslo sudé. Celý problém jsme demonstrovali podobně, jak to dělal Pythagoras se zrnky písku (viz obr. 10), avšak figuranty v dvojstupu byli sami žáci.



Slavný řecký filosof a matematik Pythagoras (ΠΥΘΑΓΩΡΑΣ), který žil asi 580–500 př. n. l., nezanechal písemné záznamy. Od jeho žáků a jejich žáků se dovídáme, co všechno tento člověk vymyslel. Dokázal například, že součet dvou sudých čísel je nutně číslo sudé, a to i v tom případě, že se jedná o čísla až nepředstavitelně velká – například o počet zrnek písku na poušti.

Pythagoras řekl, že sudý počet zrnek je možné uspořádat do dvojstupu. I když ne ve skutečnosti, tak alespoň v naší představě. Když pak dva takové dvojstupy spojíme, opět dostaneme dvojstup, tedy číslo sudé.

Obrázek 10: Ukázka z učebnice Hejný, Jirotková, Bomerová, 2010, s. 67)

Žáci velice rychle odhalili, že součet dvou lichých čísel, v našem případě lichých počtů žáků ve dvou skupinách, bude vždy sudý. Pokud totiž žáci udělají dvojice v rámci své skupiny, vždy ten jeden, co zůstane ve své skupině sám, si najde druhého do dvojice ve druhé skupině.

Dalším úkolem bylo dokázat, že součet lichého a sudého čísla je vždy číslo liché. Nyní jsem chtěla, aby žáci pracovali s čísly, a jednotlivé pokusy jsme evidovali na tabuli. Zajímalo mě, jestli někdo k argumentaci využije předchozí zkušenost s tvořením dvojic, aniž bych je k tomu vedla. Do jednoho sloupce jsme psali různá sudá čísla, do druhého sloupce čísla lichá a třetí sloupec představoval jejich součet. Žáci brzy zjistili, že vycházejí pouze čísla lichá, avšak argument, kterým by bylo možné dokázat, že tomu tak bude vždy, zatím nepadl. Vyzvala jsem tedy žáky, aby se pokusili najít dvojici čísel, kdy toto platit nebude. Po několika pokusech s menšími i hodně vysokými čísly, někdo navrhl zkusit nulu. Vyvstal ale problém k jakým číslům nulu přiřadit, zda k sudým či lichým. Ukázalo se totiž, že zapsání nuly do sloupce k sudým číslům není pro žáky jednoznačné.

Poznámky k chybějící části záznamu DI

V mých záznamech již bohužel není možné přesně dohledat, kdo z žáků diskuzi rozpoutal. Hlavní problém se ale ukázal v původním určování sudosti čísla podle jeho možnosti rozdělení na součet dvou stejných čísel. Například číslo 6 je sudé, protože je možné ho rozdělit na součet 3 + 3. Tomuto problému se více věnuje část 5.1.. Přesto se zde pro rychlou orientaci pokusím zjednodušeně pomocí dvou tezí ukázat problém, který se v důsledku analýz ukázal jako stěžejní pro rozpoutání diskuze DI. Tyto teze vycházejí z různého uchopení pojmu sudosti, jež následně ovlivnilo i přístup k sudosti nuly.

Teze I Počet je sudý, když jej mohu rozdělit do dvou stejných skupin.
Teze II Číslo je sudé, když se dá rozdělit na součet dvou stejných čísel.

Rozdíl mezi tezí I a tezí II spočívá v tom, že v případě teze I je slovo rozdělit chápáno manipulativně. Manipulaci nelze realizovat v případě, že se jedná o prázdnou množinu. Z toho vyplývá, že o sudosti čísla můžeme mluvit pouze v případě, když počet je větší než nula (počet obsahuje alespoň jeden prvek).

Oproti tezi I je teze II již desémantizovaná pro všechna čísla, tedy taková čísla, která lze napsat jako součet dvou stejných čísel. K tezi II již proto nula patří. Avšak i v tomto druhém případě sudost nuly nebyla pro všechny zcela zřejmá především kvůli jejímu atypickému chování oproti jiným číslům (např. možnost rozdělit nulu opět na nuly).

Doba mezi DI a DII

V časové prodlevě necelého jednoho měsíce mezi DI a DII nebyl problém nuly v průběhu vyučování diskutován. Přesto v hlavách žáků setrval až do DII, kdy jej jeden z žáků sám znovu otevřel. Doklady toho, že otázka sudosti nuly, kterou zřejmě považovali sami za nedořešenou, je stále v hlavách žáků živá, se mi podařilo zachytit v několika okamžicích ve třídě i mimo třídu a zaznamenat do pedagogického deníku.

První záznam je hned z téhož dne, kdy proběhla během druhé vyučovací hodiny diskuze DI.

27. 3. 2012, odpoledne

Žáci mé třídy stáli ve frontě na oběd a několik z nich velice živě diskutovalo. Ostatní, kteří stáli poblíž, diskuzi přihlíželi. Z útržků jejich rozhovoru jsem zachytila slova - sudá, nene, jojo, to neurčíš…, z nichž bylo jasné, že žáci pokračují v řešení problému sudosti nuly. Intenzita jejich hlasu se stupňovala, až Marek vykřikl na celou jídelnu: „sudolichá“. To byla poslední kapka pro dohlížející paní družinářku, aby diskuzi žáků rázně ukončila.

V průběhu měsíce pak za mnou opakovaně přicházeli někteří žáci (především Lenka) a ptali se, jestli si zase o nule budeme povídat. Každého, kdo přišel, jsem se ptala, jestli v souvislosti s nulou objevili něco nového nebo zda nějak změnili svůj názor. Nic jsem se však nedozvěděla. Předpokládám, že v jejich hlavách myšlenky zrály, ale asi zatím nebyly v takové formě, aby se už o ně mohli podělit.

Mezi žáky, kteří za mnou přišli, byla i Amálka. U ní jsem si do pedagogického deníku poznamenala, že do diskuze zapojila také členy své rodiny.

2. 4. 2012

Amálka: „Pani učitelko, kdy budeme zase řešit nulu? Ptala jsem se taťky a dědy a oba taky říkají, že je sudá.“

Sdělení Amálky mě velice potěšilo, protože je dokladem její intelektuální autonomie, jelikož ani nesporná autorita táty a dědy nevytěsnila její potřebu dobrat se pravdy vlastním uvažováním. Pravdu nepřebírá ani od těch, kterým důvěřuje, ale pouze s nimi porovnává vlastní porozumění problému. Rodinu tedy nepovažuje za prostředí, kde k dořešení problému sudosti nuly může dojít. Tím prostředím chápe třídní diskuzi.

Podobný zážitek, na který velice ráda vzpomínám, jsem měla v jiné souvislosti i s Vojtou. Úplně na závěr vyučovací hodiny jsem žáky chtěla seznámit s pojmy odvěsna a přepona u pravoúhlého trojúhelníku. Nakreslila jsem pravoúhlý trojúhelník a řekla, že strana ležící proti pravému úhlu se nazývá přepona. Načež se Vojta přihlásil a zeptal se, jak to bude, když trojúhelník bude mít dva pravé úhly. Vyzvala jsem tedy jeho i zbytek třídy, ať takový trojúhelník namalují na tabuli. Protože do konce hodiny zbývalo jen málo času, vytvořili žáci jen několik návrhů (obr. 11) a problém jsme si nechali do dalšího dne k promyšlení. Hned následující hodinu jsem dala Vojtovi prostor, aby mohl říci, jestli o trojúhelníku přemýšlel. Jeho odpověď ukazuje následující přepis z videozáznamu.

Obrázek 11: Ukázka návrhů pravoúhlého trojúhelníku se dvěma pravými úhly z tabule

7. 3. 2012 (4. ročník)

Uč. 1: Tak Vojto, změnil jsi nějak názor?

Vojta 1: Pani učitelko, (krčí rameny) já osobně teda ne, ale můj táta mi říkal, že prej, on je totiž matematik. A on říkal, že prej ne, protože, já to teda nepochopil, jak mi to vysvětloval, ale říkal, že to prostě, trojúhelník musí mít nějak všechny, musí být všechny ty, jak se tomu říká, úhlopříčky.

Uč. 2: Úhlopříčky?

Vojta 2: Pani učitelko, že musí být všechno jako rovná čára, a ne žádná jako takhle (ukazuje rukou oblouk).

Uč. 3: Hm. Jakoby, že ty strany musí být rovný čáry?

Vojta 3: Jo.

Uč. 4: To ti takhle taťka vysvětloval? A přijal jsi tu jeho teorii?

Vojta 4: Já nevím, pani učitelko, když je to táta, tak asi jo. (Směje se. Učitelka a třída se přidávají k němu.)

Vysvětlování táty bylo pro Vojtu nepřesvědčivé zřejmě i proto, že bylo nesrozumitelné. Jak Vojta slovy a především gesty naznačuje, názor táty není schopen posoudit. A podle mého stále věří, že trojúhelník se dvěma pravými úhly možná najde, že takový existuje (a není tak daleko od pravdy, vzpomeňme na sférický trojúhelník). Navenek se ale projeví spíše jeho sociální cítění, protože před třídou přeci matematika a navíc tatínka neshodí.

Ukázku autonomie žáka přináší i vzkaz od maminky Andreji.

8. 10. 2010 (3. ročník)

Vzkaz maminky Andreji přiložený k domácímu úkolu:

Úkol jsem podepsala z toho důvodu, protože se Andrea opětovně hádala a tímto Vás žádám, aby Vám to sama vysvětlila, jak k tomu výsledku přišla. Děkuji.

Andrea odmítala opravit si své řešení tak, jak jí to radila maminka. Maminka ale nakonec svou snahu vzdala, přenesla odpovědnost za ověření správnosti na mě a Andrea tak mohla ve třídě ukázat skvělé originální řešení, které si doma uhájila.

K sudosti nuly jsem pak ještě dne 9. 4. 2012 obdržela od Martiny písemný záznam, v němž se snažila zachytit své argumenty, proč je nula sudá. Tento text je předložen a analyzován dále v části 4.1.2..

Cítila jsem, že žáci chtějí znovu o nule diskutovat a chtěla jsem jejich potřebě vyhovět, ale stále jsem váhala, jak vhodně diskuzi znovu otevřít a jak ji nasměrovat. Váhala jsem tak dlouho, až Marek vstupem (109, DII) za mě můj problém vyřešil.

Informace o záznamu DII

Záznam diskuze byl pořízen na **videokameru** dne **24. 4. 2012**, tedy 28 dní po první diskuzi (DI). Nahrávání proběhlo bez přítomnosti cizí osoby, protože kamera byla umístěna na stativu na jedné z volných lavic v rohu třídy (viz obr. 12) a natáčení obsluhovala učitelka. Jelikož učitelka zároveň zajišťovala i výuku, převážná většina záznamu snímá jen několik žáků, kteří sedí v záběru nasměrování kamery na stativu (jak naznačuje šipka na obr. 12). Občas je ale objektiv kamery učitelkou otočen i na další žáky, a to především v okamžiku, když si vezmou nebo dostanou slovo.

Záznam proběhl ve stejné třídě a opět ve **4. ročníku** jako v DI, avšak oproti předchozímu složení žáků v DII chybí žáci Matěj a Petr. Dříve chybějící Klára je již nyní přítomna. V Diskuzi o nule II je tedy přítomno **14 žáků** (7 dívek a 7 chlapců).

Obrázek 12: Schéma třídy v DII

Poznámka k počátku diskuze o nule DII

Žáci se nejprve seznamovali (001 – 029) s navíjením čísel na směrovou růžici (prostředí Směrová růžice představeno v části 2.5.3.). Při společném uchopování úlohy Bořek (036) omylem k severu růžice napsal jedničku namísto nuly[47]. Tato chyba akcentovala pojem nula do centra pozornosti žáků. Zvýšenou pozornost nule věnoval i Marek (109), který si všiml, že na severu vedle ní stojí pouze čísla sudá. Tuto objevenou skutečnost považoval za další argument potvrzující sudost nuly.

Ač toto prostředí za tímto účelem nebylo připravováno a ani o sudosti nuly nepadla zmínka, Marek se znovu k nedořešenému problému sudosti nuly z DI vrátil. To znamená, že tato myšlenka musela být v jeho mysli přítomna po celou dobu, protože jakmile přišel impulz, který ji mohl mobilizovat, okamžitě k tomu došlo.

[47] Bořek (036, DII) k severu růžice píše jedničku, protože v jeho vědomí přirozená čísla začínají jedničkou. Nula pro něj stojí stranou jako něco zvláštního. Spontánní reakcí několika žáků ve třídě je Bořek na svou mýlku upozorněn a ihned ji opravuje.

4. Problém sudosti nuly

Otázka, jestli je nula sudá, je stěžejní otázkou, na kterou žáci hledají odpověď v diskuzích DI a DII. Při zvažování této otázky se celkově v obou diskuzích objevila všechna teoreticky možná tvrzení, která o nule z hlediska sudosti nebo lichosti můžeme říci:

T1: Nula je sudá.

T2: Nula je lichá.

T3: Nula není sudá ani lichá.

T4: Nula je sudá i lichá. (Dle slov dětí sudolichá, příp. lichosudá.)[48]

Všechna tato čtyři tvrzení T1, T2, T3 a T4 zazněla v diskuzi DI. V diskuzi DII se objevila už jen tvrzení T1 a T4. Pořadí těchto tvrzení je chronologické. Jednotlivým tvrzením je pozornost věnována zvlášť jak v DI, tak i v DII, pokud se v ní objevilo. Soubor všech argumentací žáků bylo nelehké organizovat. Nejnáročnější na zpracování přitom představovalo T1, a proto v úvodu následující části o T1 je nejprve přiblížen způsob její organizace.

4.1. Tvrzení T1: Nula je sudá

Celkový přehled organizace výroků týkajících se T1 zachycuje tabulka na konci této části v 4.1.10..na str. 114

Výchozím materiálem mapování argumentace žáků pro sudost nuly jsou následující tři chronologicky řazené materiály:

- výběr vstupů žáků z protokolu DI (viz část 4.1.1.) předložený v tabulce (dále jen tab. DI)
- písemný záznam Martiny, který vznikl v době mezi DI a DII (část 4.1.2.)
- výběr vstupů žáků z protokolu DII (4.1.3.) také v tabulce (dále tab. DII)

[48] Při odkazování na tato tvrzení je dále v textu používáno pouze velké tiskací písmeno T a číslo daného tvrzení. Např. tedy T1 pro první tvrzení: *„Nula je sudá“*.

Uspořádání výběru vstupů v tab. DI a tab. DII

V prvním sloupci tabulek je vždy soubor všech vybraných vstupů žáků, které se vyjadřují pro T1. Do tohoto výběru nejsou pro větší přehlednost zařazeny vstupy, které vyjadřují pouze souhlas s T1 bez argumentační opory (tedy např. 005 z DI Ondra: „Je sudá“). Ze stejného důvodu nejsou zařazeny vstupy týkající se pouze sudých a lichých čísel obecně bez poukazu na jev nuly (např. 183 v DII Nela: „A když sečtu dvě lichý, tak mi taky vyjde sudý.“). V přehledu též nejsou vstupy zaměřující se spíše na řešení problému možnosti (nemožnosti) nulu rozdělovat než na sudost nuly, i když oba problémy jsou úzce propojeny. Vstupům zabývajícím se rozdělování nuly je věnována samostatná část (5.1.).

Ve druhém sloupci následuje analýza jednotlivých vstupů žáků vzhledem k argumentaci pro sudost nuly. Pro lepší orientaci a především pro možnost sledovat hloubku myšlenek u jednotlivých žáků jsou pak na základě těchto analýz vstupy žáků rozděleny do šesti skupin.

A: Rozdělování a skládání (viz část 4.1.4.)

B: Rytmus (4.1.5.)

C: Nula jako číslice na místě jednotek (4.1.6.)

D: Aditivní a multiplikativní struktura sudých a lichých čísel (4.1.7.)

E: Směrová růžice (4.1.8.)

F: Neexistence množiny sudolichých čísel (4.1.9.)

Třetí sloupec tabulek kóduje přiřazení vstupů žáků ke skupinám A – F. Zároveň je zde i odkaz na číselné označení naformulovaných tvrzení v rámci těchto skupin, jak je ukázáno dále.

Uspořádání textu věnujícího se skupinám argumentů žáků A - F

Myšlenky žáků daných skupin jsou podrobně analyzovány a komentovány v dalších částech textu, které se věnují jednotlivým skupinám argumentů zvlášť.

Samotné vstupy žáků se staly zdrojem pro naformulování jednoho či více tvrzení, které se snaží matematicky přesněji, názorněji a stručněji zachytit výpovědi žáků. Tato naformulovaná tvrzení jsou číslovaná od jedné a jsou dokladována vybranými segmenty ze vstupů žáků. Strukturu zpracování argumentů žáků zachycuje pro ukázku následující přehled:

A Skupina, do níž jsou zařazeny argumenty žáků týkající se rozdělování a skládání čísel (nuly).

A1 První matematicky přesněji vyjádřený výrok naformulovaný z jednoho nebo více argumentů žáků v rámci skupiny A, který zní: *Číslo, které lze rozdělit na dvě stejná čísla, je číslo sudé.*

A1′ První výběr části ze vstupu žáka, který, i když vlastními slovy, vyjadřuje tvrzení A1, tedy: *Nula je sudá, protože ji můžeme rozdělit na dva kusy (Lenka 226, DI).*

A1″ Druhý výběr části ze vstupu žáka souvisejícího s A1. Jo, *vždyť to můžeš rozdělit na nula a nula* (Luboš 120, DII).

Analogické adresování skupin argumentů, naformulovaných výroků a výpovědí žáků je používáno i u dalších skupin B, C, D, E, F.

Pro lepší dokreslení výpovědí žáků jsem dále ke skupinám A – E zařadila také příklady reakcí oponentů, kteří se snažili tyto výpovědi zpochybnit. Protiargumenty skupiny F nejsou zařazeny, protože, jak je popsáno u skupiny F, sama vznikla jako opoziční názor k T2, kterému je věnována samostatná část. Většina zaznamenaných protiargumentů pochází z DI, kterou považuji za argumentačně velmi bohatou. Žáci vyslovují mnoho argumentů, ale zároveň proti nim vyvstává řada námitek.

4.1.1. Argumenty žáků[49] v DI a jejich analýzy

032 Vojta: Akorát, že ehm jako lichý číslo se taky dá rozdělit, ale ne na dvě stejný části, na tři a dva třeba. *(Slovy „tři a dva“ má hoch na mysli číslo 5, které vidí napsané na tabuli)* *Na tento vstup reaguje učitelka (033): A ty seš teda pro co? Pro jaký názor?* *A Vojta doplňuje:* 034 Vojta: Pro sudý.	Vojta formuluje svou myšlenku dobře. Myšlenka je pravdivá, ale na první pohled se může zdát divné, proč ji Vojta vůbec říká, jelikož se k sudosti nuly vůbec nevyjadřuje. Vojta má však potřebu prověřit, že skutečnost, číslo se dá napsat jako součet dvou stejných čísel, platí pro sudá a pouze pro sudá čísla. Pro lichá čísla už to neplatí. Z jeho výroku ovšem neplyne myšlenka, která je však v jeho vědomí, i když není formulována - nula je číslo sudé. Proto vstupuje učitelka. Na přímý dotaz učitelky (033), která chce, aby řekl i to, co je v jeho hlavě, Vojta (034) odpovídá, že nula je číslo sudé.	A3
036 Marek: Pani učitelko, mohu jít? *(Θ)* Pani učitelko, ale v desítce je taky nula a je to sudý.	Skvělý objev. Nula není jen počet. Je to i číslice, je to díky desítkové soustavě i komunikační nástroj, nula v čísle 10. Pokud se nula vyskytuje v číslech na místě jednotek, tato čísla jsou sudá.	C1

[49] Výběr vstupů žáků z protokolu DI (viz příloha 1), kteří hledají argumentační oporu pro T1.

044 Marek: Ale ta nula je sudá. *Reaguje především na vstupy 038, 040, v nichž si Vojta a Nela všímají, že v čísle 10 je jednička lichá.*	Snaží se vrátit ke své původní myšlence (036) a zdůraznit v ní, že pro určení sudosti čísla je důležitá pouze jeho poslední číslice, tedy číslice na místě jednotek.	C1
089 Lenka: Takže jak máme od jedničky čísla za sebou, tak je to vždycky sudý, lichý, sudý, lichý. Ale kdyby byly dvě za sebou lichý, tak už by to nebylo jakoby to *(odmlčí se).* *Slovy „jakoby to" myslí střídání, jak ukazuje vstup 091, kde svou myšlenku s pomocí Emy (090) dokončuje.* *Ema (090): Střídání.* Lenka (091): No, střídání.	Lenka si všímá pravidelného střídání sudých a lichých čísel na číselné ose. Je možné, že se tato myšlenka ve třídě objevila již dříve například v rámci diskuze nějaké skupiny žáků. V protokolu se však rytmické střídání sudých a lichých čísel na číselné ose objevuje poprvé.	B1
132 Martina: Když mám prostě, *(Θ)* jako mám nahoru, od nuly mám nahoru a pak mám ještě dolu, tak vlastně (Θ) to je jednička, je ta nahoře.	Martina se opět vrací k adresám, jak tomu bylo u vstupu Lenky (089). Tuto myšlenku ale dále rozvíjí, jak je vidět ve vstupu 146, kdy na vyzvání učitelky vše znázorní na tabuli.	B1
146 Martina: A tady mám nulu *(Θ)*, a pak když tady mám zase mínus. *(ΘΘ)* No a tady mám vlastně, ta nula by měla bejt jako sudá, protože tady mám jedničku, ta je lichá, ta nejde rozdělit, pak dvojka, ta je sudá, že jo. A tady ta mínus jednička, ta taky nejde rozdělit, to je vlastně jako... *(dále není rozumět)*.	Martina zvolením svislé osy ukazuje, že již v momentu, kdy začala kreslit, měla vše promyšlené. Věděla, že bude chtít znázornit nejen kladná, ale i záporná čísla. Zajímavé je také umisťování teček určujících daný počet namísto běžnějšího zápisu čísel jako adres číselné osy. To mohlo být způsobeno tím, že jednotlivé příčky na číselné ose	B1 A3

<table>
<tr>
<td><u>Obrázek z tabule:</u>

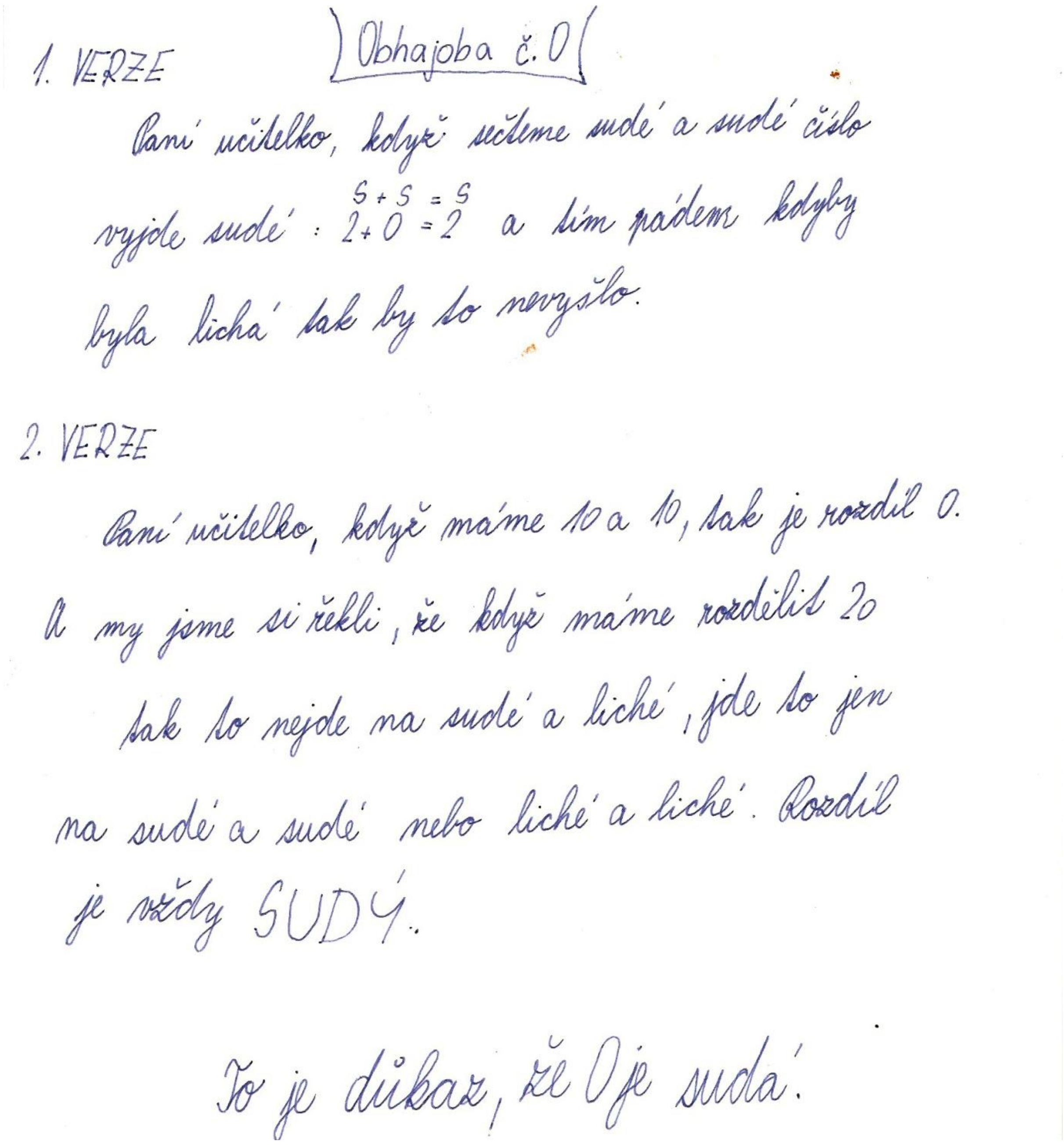
(Obrázek je vložen z interaktivní tabule. Bohužel v té době interaktivní tabule nefungovala dobře, a tak dělala záznam jinde, než žáci psali. Tuto skutečnost beru v úvahu i při analýze.)</td>
<td>zakreslila tak blízko u sebe, že by se jí k nim čísla obtížně vpisovala, obzvláště když se zrovna na tabuli tak špatně psalo. Volba teček pro znázorňování hodnot na číselné ose mohla ale být i záměrná. Mohla souviset s její potřebou vizualizovat, která čísla (počty) lze rozdělovat na dvě stejné části a která ne. Tedy aby bylo na první pohled vidět střídání lichých a sudých čísel.
Pro Martinu je hlavní argument rytmu. V rámci něj ale zazní i myšlenka, že jednička jako liché číslo nejde rozdělit. Myšlenka A3 je tak ve službách myšlenky B1.</td>
<td rowspan="2"></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">K místu, kde je na číselné ose nula, používá znak nuly. Kdyby chtěla nulu zapsat v tečkovém jazyce, musela by zde nechat prázdné pole. Ale každé prázdné pole vzbuzuje dojem, že autor něco zapomněl udělat. Umístěním znaku nula tak dává jasně na vědomí, že tam ta nula je.
U záporných hodnot pak před tečky umístila znak mínus. Přitom zde měla i alternativu napsat záporná čísla jinou barvou, jak to známe například z teploměru. To by pak poukazovalo na sémantické kotvení obrázku. Ona ale používá znak mínus, z čehož je znatelné, že celý problém chápe v aritmetické struktuře, protože znak mínus slouží k označení záporných čísel. Užívá zde tak zároveň vedle sebe sémantický jazyk teček a strukturální jazyk nesený znakem záporu. Skutečnost, že se s takovýmto zápisem zřejmě nikde dříve nesetkala, poukazuje na její tvořivost a i na to, že tomu skutečně rozumí.</td>
</tr>
</table>

149 Martina: Takže je to úplně to samý. Takže je to prostě lichý, sudý, lichý, sudý, to je vlastně *(zbytek není rozumět).*	Zde ukazuje zrcadlovost kladných a záporných čísel z hlediska nuly. A tak když jdu po ose nahoru, je to to samé, jako když jdu po ose od nuly dolu. V obou směrech se střídají lichá a sudá čísla, a proto nula musí být sudá.	B1
154 Martina: Protože, jak říkala Lenka, tak se to střídá. Protože to by bylo trošku divný, kdyby byly, takhle by musely bejt tři vedle sebe stejný. To by bylo třeba, já nevim...	Martina říká, že myšlenku rytmu převzala od Lenky (089). Ona však její myšlenku rozšiřuje o záporná čísla a tím se nula dostává doprostřed rytmu sudý, lichý, sudý, lichý.	B1
208 Vojta: Akorát že, akorát že to je jakoby *(Θ)*, kdyby tady byla nula a nula, tak je to taky stejný, že jo, *(Θ)* takže je to sudý. Protože, když tady máš jedna a jedna, tak je to taky stejný, že jo, takže je to dva.	Ze vstupu 032 víme, že Vojta propojuje tvrzení A1 s tvrzením A3. Zde ale o druhém z uvedených tvrzení není zmínka. Na jeho přítomnost v hlavě dítěte však poukazuje pouze slovo kdyby. Vztah $0 + 0 = 0$ argumentačně podepírá vztahem $1 + 1 = 2$. V obou těchto případech je výsledek sudý.	A2
216 Ondra: Mínus jedna je lichá. A mezi tím musí bejt nějaký sudý.	Ondra zužuje pohled z rytmického střídání sudých a lichých čísel na celé číselné ose jen na nulu a čísla s ní sousedící, která jsou lichá.	B3
223 Lenka: Ale pak by zase, pak by to nevycházelo ve všech těch číslech, že jednička, dvojka, dvojka je sudá, pak by to vůbec nevycházelo.	I když to Lenka doslova neříká, znovu opakuje, že pokud by nula nebyla sudá, došlo by k výpadku z rytmu sudý, lichý, sudý, lichý.	B1

226 Lenka: Pani učitelko, když máme nic, tak to můžeme rozdělit třeba na sto nic *(Θ),* a to jde rozdělit na milion kusů, takže ta *(Θ)* nula je sudá, protože ji můžeme rozdělit na dva kusy, na tři, na čtyři až na milion.	Lenka si všímá především procesu dělení nuly. Možností rozdělování nuly i na tři, čtyři až milion částí podpírá základní tvrzení, že nula se dá rozdělit na dvě části. Když se něco dá rozdělit na libovolný počet částí, tak se dá určitě rozdělit i na dvě části. Lenka zde tak nachází jinou podpůrnou argumentaci tvrzení A1 (příp. A2), než kterou nabízeli jiní. Ostatní ukazovali další sudá čísla, která lze rozdělovat na dvě stejné části. Ona však vychází z toho, že nula se dá rozdělit na libovolný počet stejných částí, a proto tedy i na dvě.	A1
229 Amálka: Pani učitelko, tak jako, když mám, když si sečtu jako třeba šest plus šest, tak mi to dá dvanáct. Takže sudý plus sudý mi dá sudý. A nula plus nula. Kdyby nula byla sudá, tak mi to dá taky sudý, protože nula plus nula se rovná nula.	Amálka vychází z generického modelu 6 + 6 = 12 a mění ho na abstraktní výrok sudý + sudý = sudý. Tento abstraktní výrok pak aplikuje na případ nuly, tedy 0 + 0 = 0. Kvalita myšlení dívky je velice dobrá už z hlediska postupu, který používá: generický model, jeho změna na abstraktní poznání formulované slovy a aplikace poznání na daný případ (na případ nuly).	D1

4.1.2. Písemný záznam Martiny a jeho analýza

Na konci hodiny po ukončení DI jsem vyzvala žáky, aby mi přišli osobně dopovědět své argumenty, protože jsem jejich rozprouděnou diskuzi musela předčasně ukončit přestávkou. Bylo mi líto nedat jim slovo, o které se hlásili, protože jsem viděla jejich neustávající zájem. U mého stolu se jich sešla celá řada, ale víceméně šlo o opakování argumentů, které se již v protokolu objevily. Přesto jsem je všechny vyzvala, aby sepsali to, co říkají, že je to důležité a že to uschováme pro další diskuzi o nule. Udělala to ale jen Martina, která následující text (viz obr. 13) přinesla téměř čtrnáct dní po DI, tedy v době, kdy jsem už vůbec nečekala, že někdo něco přinese.


1. VERZE)Obhajoba č. 0(

Paní učitelko, když sečteme sudé a sudé číslo vyjde sudé: $\overset{S}{2}+\overset{S}{0}=\overset{S}{2}$ a tím pádem kdyby byla lichá tak by to nevyšlo.

2. VERZE

Paní učitelko, když máme 10 a 10, tak je rozdíl 0. A my jsme si řekli, že když máme rozdělit 20 tak to nejde na sudé a liché, jde to jen na sudé a sudé nebo liché a liché. Rozdíl je vždy SUDÝ.

To je důkaz, že 0 je sudá.

Obrázek 13: Písemný záznam Martiny nazvaný jako Obhajoba č. 0 z 9. 4. 2012

Analýza textu Martiny

Již na první pohled je patrné, že si Martina dala s textem hodně práce a že je promyšlený. Nazývá jej Obhajoba č. 0, čímž naznačuje, že vstupuje do argumentační diskuze. A má dokonce dvě verze argumentů, kterými podepře svůj názor. Podoba tohoto textu je výsledkem postupného upravování a promýšlení několika verzí předchozích vznikajících ve škole o přestávkách a zřejmě i doma. Jde tedy o finální úpravu, tzv. přepis načisto, a neobsahuje proto žádná škrtání a je velmi úhledně napsaný. V Martině pravděpodobně myšlenky postupně zrály, a proto si na odevzdání práce nechala delší čas.

Mám mnoho zkušeností s tím, že žáci v tomto věku, i když vyřeší poměrně složité úlohy, nechtějí tato řešení psát. Řešením se pochlubí, ale zapisovat se jim jej nechce. A tak někteří i velice šikovní žáci na matematiku odmítají soutěžit v matematických soutěžích, jako je například Matematická olympiáda, které vyžadují popisy postupů řešení. Martina je zde ale trochu výjimka. Doposud sice odevzdávala jen práce, které jsem žákům zadávala ve formě dobrovolných úkolů navíc, ale i přesto v počtu odevzdaných textů držela ve třídě přední místo. Neochota psát není u Martiny tedy tak silná jako u některých jiných žáků ve třídě. Avšak všechny její předchozí písemné projevy byly vlastně jen reakcí na mou výzvu. Nyní ale poprvé dochází k tomu, že dává písemné vyjádření k něčemu, co iniciovala ona sama ze své vnitřní potřeby a co sama objevila. Silnou potřebu dívky myšlenky sdělit potvrzuje i skutečnost, že odevzdaný text byl psaný načisto, jemuž, jak je mi známo, předcházely ještě další verze. Síla potřeby je zde přímo vázána na silné citové prožívání nového kognitivního objevu. Martina něco objevila, má z toho radost a chce se o ní podělit. Objev ale nepřišel hned, z kraje nebyl zcela jasný, musel se postupně krystalizovat. Dospěla k němu právě při opakovaných úpravách těch několika předchozích verzí, při nichž Martina problém odkryla a došlo k AHA-efektu spojenému s velkou radostí z objevu. Martina však měla nejen potřebu objevovat, tak jako i ostatní žáci, ale chtěla objev také vyzdvihnout, což je v tomto případě předvést ho učitelce.

Martina nabízí hned dvě verze argumentů a obě začínají oslovením, paní učitelko. Tím ukazuje, že si uvědomuje hloubku svých myšlenek. Objevuje se zde tak i metakognitivní chápání toho, co dělá. Sociální směřování na učitelku používá zřejmě nejen proto, že učitelka byla ta, kdo vyzval k sepsání myšlenek, ale protože i očekává zpětnou vazbu. Na metakognici Martiny je patrné, že má teoretické potřeby. A v tuto dobu má potřebu uchopovat vše co nejpřesněji. I ostatní žáci diskuzi prožívali, ale Martina se pokouší problém analyzovat.

Rozdělením argumentů do 1. a 2. verze říká, že chce ukázat dvě odlišné myšlenky. V první verzi využívá pravidel o součtu čísel a ve druhé sleduje jejich rozklad. Dále je už každá z verzí analyzována zvlášť.

1. verze

Rovnice 2 + 0 = 2 je generickým modelem, protože nad ním stojí abstraktní poznání, tedy když sečteme sudé a sudé číslo, vyjde nám opět sudé číslo. Toto abstraktní poznání je navíc dokonce uvedeno i v abstraktním jazyce. Martina nevypisuje sudé + sudé = sudé, ale rovnou píše S + S = S.

Druhá část tvrzení „a tím pádem, kdyby byla lichá, tak by to nevyšlo" není zcela přesně vyjádřena, ale v rámci jazykových schopností žáka tohoto věku zde zřejmě nelze očekávat ani nic přesnějšího. Martina tedy svými slovy říká, že kdyby nula byla lichá, tak by rovnost, sudé plus liché rovná se sudé, nemohla vyjít. Sudé plus liché být sudé nemůže. Pro sudost nuly to tedy platí, ale pro lichost už ne. V této druhé části tvrzení je tak intuitivně přítomno i tvrzení, že každé číslo je buď sudé, nebo liché.

2. verze

Pořadí myšlenek této verze neodpovídá logickému sledu, ale spíše tomu, jak na ně postupně přicházela. První větou říká, že odečtu-li dvě stejná čísla, a je jedno, jestli dvě stejná sudá nebo lichá čísla, vždy dostanu nulu. Ona bere čísla 10 a 10, která jsou generickým modelem toho, že číslo mínus stejné číslo je vždy nula. Tedy rozdíl dvou stejných sudých nebo rozdíl dvou stejných lichých čísel je nula.

Pak si Martina bere sudé číslo 20. Když dvacítku rozdělíme na dvě čísla, je možné dostat pouze dvě sudá čísla (např. 18 a 2) nebo dvě lichá čísla (např. 9 a 11). Toto tvrzení je generický model, protože nejde jen o dvacítku, ale platí to i pro jakékoli jiné sudé číslo. Jejím intuitivním poznáním tak je, že jestliže součet dvou čísel je sudý, pak i jejich rozdíl je sudý. Pokud součet čísel je lichý, i jejich rozdíl bude lichý. Když tedy vezmu dvě lichá nebo dvě sudá čísla a odečtu je, rozdíl bude vždy sudý.

Vrátíme-li se tedy na začátek tvrzení této verze a odečteme dvě stejná čísla, např. 10 a 10, rozdíl musí být sudý. A proto nula je sudá.

4.1.3. Argumenty žáků[50] v DII a jejich analýzy

Vzhledem k tomu, že je následující série vstupů pouhým fragmentem protokolu DII a že většina těchto vybraných vstupů protiargumentuje vstupům Bořka nebo Šimona, jsou i vstupy těchto dvou žáků místy uvedeny v prvním sloupci tabulky pro lepší možnost sledování souvislostí (analyzovány jsou ale až dále v 4.4.).

109 Marek: Pani učitelko, jak jsme se jednou furt si řikali, jestli je nula lichá nebo sudá, tak teď jsme zjistili, že patří mezi ty sudý.	Marek přesouvá pozornost ze vztahu čísel kolem růžice na sudost nuly. Znovu tak iniciuje diskuzi o nule. Všímá si, že na severu čtyřcípé růžice se hromadí pouze čísla sudá včetně nuly.	E1
114 Ema: Ježiš, proč ne? Vždyť tamhle jsou všechny sudý *(velmi rozčílená intonace).* *Reakce na Bořka (113): Ne. (Nesouhlasí se sudostí nuly.)*	Ema poukazuje na čísla hromadící se na severu růžice se čtyřmi vrcholy. Všechna tato čísla jsou sudá, a proto i nula bude sudá. Ač se Ema v DI na konci diskuze hlásila pro sudolichost nuly, nyní již není ochotna ji připustit.	E1
120 Luboš: Jo, vždyť to můžeš rozdělit na nula a nula.	Nula lze podle něj rozdělit na součet dvou nul, tedy součet dvou stejných čísel.	A1
122 Vojta: Sudolichá, to nemůže bejt žádný číslo. To *(není rozumět)* neexistuje. *Reakce na Bořka (115): Je sudolichá.*	Nulu není možné zařadit mezi sudolichá čísla, protože takovéto označení neexistuje.	F2

[50] Výběr výroků žáků z protokolu DII (viz příloha 2), kteří hledají argumentační oporu pro T1.

127 Vojta: Nene, je jen sudá. *Reakce na Bořka (126): Ale že teďkon, pani učitelko, patří jakoby do tadytý, ale jinak je obojí.*	Nesouhlasí s tím, že by nula mohla být zároveň sudá i lichá. Připouští pouze možnost, že je sudá. Určování sudosti nuly není tedy záležitostí konvence, jak se snaží navrhnout Bořek (126). Tímto vstupem Vojta (a i Ema 128) ukazuje, že je v tomto případě schopen rozlišit konvenci od matematické pravdy, a tím i dokazuje svou vyšší matematickou úroveň.	F1
128 Ema.: Jak to, že obojí? *Reakce na Bořka (126) jako u Vojty (127)*	Celá čísla nemohou být zároveň sudá a lichá.	F1
130 Ondra: Ale to by v ní muselo bejt víc čísel než jenom nula. *Také reakce na Bořka (126).*	Většina žáků tvrdí, že Bořek nemá pravdu a snaží se mu jeho názor vyvrátit. Ondra jde ale dále. Připustí variantu sudolichosti nuly, avšak zároveň říká, že pokud by tomu tak bylo, musela by do této skupiny patřit ještě i další čísla než jen nula. Výpověď Ondry ilustruje dvě důležité kognitivní skutečnosti ukazující kvalitu chlapcova myšlení. První skutečností je schopnost připustit myšlenku protivníka a snažit se logickým prodlužováním této myšlenky dospět ke sporu. To se mu z hlediska jeho vidění matematiky i podaří. Druhou skutečností je cit pro matematickou terminologii. Ondra za oprávněný termín považuje pouze takový, který pokrývá více jednotlivostí. V matematice tato teze pravdivá není, ale naprosto neodpovídá úrovni matematického myšlení žáka základní školy.	F3
133 Vojta: Protože vždycky na konci, když píšeš deset, tak je tam nula, když píšeš dvacet, tak je tam taky nula, a všechno je to sudý.	Popisuje generický model. Všechna čísla, která končí nulou, jsou sudá. Nula bude tedy také sudá.	C1

134 Ondra: Jo a desítka je sudá, dvacítka je sudá, třicítka je sudá.	Ondra si osvojuje[51] myšlenku Vojty (133) a formuluje ji trojicí izolovaných modelů (10, 20, 30), které jako celek jsou vlastně modelem generickým. Na rozdíl od Vojty ale tento generický model nepopisuje.	C1
153 Vojta: Ale pak by se to střídalo, pak by tam byla zase sudá. *Reakce na Šimona (151): Tady kdyby se třeba tady udělala nějaká ta velká, že jo. Tak kdybysme to počítali, bylo by jich pět, tak tady by byla pětka zase (ukazuje na sever).* *(Šimon navrhuje přikreslit růžici další pátý vrchol.)*	Šimonova myšlenka (151) o rozšíření růžice na pět vrcholů inspiruje Vojtu, aby se v novém typu růžice více zaměřil na čísla vyskytující se na severu, a to mu i pomůže najít další argument pro sudost nuly. Vojta (153 a 156) si všimne, že ve skupině sudých a lichých čísel na severu růžice dochází k jejich rytmickému střídání. Patnáctka je lichá, desítka je sudá, pětka je lichá, a proto další v pořadí nula bude zase sudá.	B2
156 Vojta: Takže je ta nula sudá, protože tam se střídá sudá, lichá, sudá, lichá, že jo. Takže je to furt sudý.	Viz 153.	B2
163 Vojta: A co je deset? To je sudý. *Reakce na Šimona (154): Pak by tam bylo, pani učitelko, deset, pak patnáct, pak dvacet.*	Upozornění na rytmus.	B2
166 Ema: Protože tam máš, ale ta nula, ta pětka je lichá, a předtím je ta nula sudá.	Ema si osvojuje Vojtův argument (153, 156) rytmického střídání sudých a lichých čísel v aritmetické posloupnosti s diferencí 5.	B4

[51] Ondra (134) a dále i Ema (166) myšlenku jen mechanicky nepřebírají, ale na základě svého autonomního pohledu na izolované modely ji přijímají a osvojují si ji.

173 Lenka: Že nula je určitě sudá, protože, když si dáme třeba tři krát čtyři, tak to nám vyjde dvanáct. A třeba, když si dáme jedna krát nula, tak to máme nula.	Lenka si zřejmě udělala několik pokusů, kdy násobila lichá čísla se sudými. V součinu vždy dostala číslo sudé a z toho usoudila, že liché číslo krát sudé číslo bude vždy číslo sudé. Tento objevený vztah se pak pokouší dále použít pro argumentaci sudosti nuly.	D7
177 Vojta: Ale nula je určitě... 179 Vojta: Sudá, protože, protože ehm, když si přičtem k nule dvojku, což je sudý, tak je to dvojka, a to je taky sudý, takže to musí bejt, protože ehm, kdyby se přičetlo...	Vojta si uvědomuje strukturu, že součet dvou sudých čísel dá opět číslo sudé, ale jak je obvyklé v jeho vstupech, když se snaží něco objasnit, hledá nejprve izolované modely, na kterých by daný problém ukázal a doložil.	D2
180 Ondra: Když sečtem dvě sudý, tak nám vyjde sudá.	Aditivní strukturální vztah, na který Vojta (179) poukazuje, Ondra shrnuje.	D1
191 Ondra: No jo, ale nula plus jedna je pořád jedna, což vyjde lichý.	Promýšlí další aditivní strukturální vztah sudý + lichý = lichý.	D3
198 Vojta: Protože jenom sudý a sudý může bejt to, a když to sečtu s pětkou, nula a pět, tak to je pět, takže sudý a lichý je vždycky lichý číslo, což je jedinej součet. *(Během svého výkladu popojde až k tabuli).*	Na příkladu se snaží doložit další strukturální vztah, o kterém mluvil Ondra. Je-li tedy nula vložena i do vztahu sudý + lichý = lichý, stále vychází, že je sudá.	D1 D3

202 Ondra: Že já mám ještě podporu na to, že je to sudý. Protože vždycky když počítám, můžu počítat třeba do miliardy, a pořád se mi střídá, sudý, lichý. Že mám nula, jedna, dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm, devět, deset a takhle se mi to pořád střídá pořád. Po desítce je jedenáctka, a ta je zase lichá.	Vrací se k myšlence číselné osy a rytmickému střídání sudých a lichých celých čísel na ní, která již zazněla v DI.	B1
207 Vojta: Sudý a sudý, může bejt sudý číslo nebo lichý a lichý může bejt sudý číslo. Ale sudý a lichý nemůže bejt sudý číslo, ehm takže musí bejt ta nula sudá, protože nula a pět je pět, takže to je to jakoby lichý číslo, což je vždycky, když sečtu sudý a lichý, vznikne, a když sečtu lichý a lichý, tak ne. A když udělám sudý a sudý, takže nula a *Θ* šest, tak to je šest.	Vojta (207) na závěr diskuze dává jednotlivé vztahy aditivní struktury do celku a využívá je pro potvrzení výroku, že nula je sudá.	D1 D4 D3

4.1.4. Skupina A: Rozdělování a skládání[52]

Napíšeme-li 0 = 0 + 0, může se na to žák dívat jako na rozdělení nuly na dvě stejná čísla (A1). Avšak zápis 0 + 0 = 0 může žák vnímat jako složení dvou stejných čísel, z nichž vznikne nula (A2). Toto jemné rozlišování má většina žáků pouze v intuici. Mohou se však objevit někteří, jako například Vojta (210)[53] v DI, kteří si uvědomují, že jde o dva různé pohledy. Vojta ovšem říká, že i přesto oba pohledy říkají totéž.

Argumenty vyjadřující se spíše k otázce možnosti (nemožnosti) rozdělování (příp. skládání) nuly na stejné části při posuzování její sudosti jsou zařazeny do samostatné kapitoly (viz v kapitola 5.1.).

A1 Číslo, které lze rozdělit na dvě stejná čísla, je číslo sudé.

Argumenty související s tímto tvrzením vycházejí z původního rozlišování sudých a lichých čísel na základě posouzení možnosti rozdělení čísla na dvě stejné části tak, jak to žáci byli zvyklí dělat doposud. Sudá čísla 2, 4, 6, 8 atd. lze rozdělit na dvě stejné části 1+1, 2+2, 3+3, 4+4. A stejně tak i nula může být rozdělena jako součet dvou nul (0 = 0 + 0), a tak ji řadíme k sudým číslům.

Slovo rozdělit v sobě skrývá dva možné pohledy, pohled sémantický a pohled strukturální. V případě sémantického pohledu jde o představu manipulativního dělení objektů do dvou množin, například šesti bonbonů do dvou hromádek, na tři bonbony a tři bonbony. Při strukturálním pohledu rozděluji číslo na součet dvou stejných čísel, např. tedy číslo 6 na součet 3 plus 3. V tomto druhém případě nejde již o manipulativní (fyzické) dělení, jak tomu bylo u předchozího, ale o abstraktní.

<u>Z diskuze DI</u>

A1′ *Nula je sudá, protože ji můžeme rozdělit na dva kusy* (Lenka 226, DI).

Ve větě se prolíná jazyk matematický (reprezentovaný slovem nula) s jazykem běžného života (reprezentovaný idiomem na dva kusy). Zmiňovaný idiom ukazuje, že představa Lenky má manipulativní charakter. Pojem nula je ale Lenkou chápán jako objekt abstraktní, a proto je ochotna připustit, že nula se dá rozdělovat. Neříká sice, že ony rozdělené kusy mají být stejné, ale bezpochyby lze usuzovat, že v její mysli tyto kusy stejné jsou.

[52] Během celé diskuze žáci pracují pouze v oboru přirozených případně celých čísel. Řeknou-li tedy rozpůlit číslo, mají na mysli rozdělit ho na dvě stejná celá čísla.
[53] Tomuto vstupu je věnováno více pozornosti v kapitole o rozdělování nuly.

Z diskuze DII

A1″ Jo, *vždyť to můžeš rozdělit na nula a nula* (Luboš 120, DII).

Podle Luboše je nula sudá, protože ji můžeme rozdělit na dvě stejná čísla, tedy na nula a nula. Jeho formulace tvrzení působí více strukturálně, než tomu bylo v tvrzení Lenky (226, DI). Luboš s nulou zachází, jako kdyby byla nesklonné slovo. Tento jev je možné najít i v dalších argumentech žáků. Zřejmě to ukazuje na skutečnost, že nulu chápe jako znak, jako zapsanou číslici.

A2 Číslo, které lze vytvořit jako součet dvou stejných čísel, je číslo sudé.

Slovo vytvořit opět nabízí jak pohled sémantický, tak strukturální. Buď mohu z hlediska sémantiky vzít tři bonbony a tři bonbony, dát je dohromady a dostat tak větší hromádku o šesti bonbonech, tedy hromádku o sudém počtu objektů. Nebo strukturálně sečíst dvě stejná čísla jako 3 plus 3 a dostat tak sudé číslo, v tomto případě 6. Číslo nula lze také vytvořit jako součet dvou nul, a tak i nula je číslo sudé.

Z diskuze DI

A2′ *Kdyby tady byla nula a nula, tak je to taky stejný, takže je to sudý* (Vojta 208, DI).

První část tvrzení je v kondicionálu uvozeném slovem kdyby, čímž dává Vojta najevo, že připouští i jinou variantu. V jeho hlavě je tedy zřejmě i možnost, i když o ní nemluví, vzít různá čísla jako např. 0 + 1. Pak by ovšem výsledek byl jedna a ten je lichý. Vojta tedy v podstatě říká: „Kdyby tady byla nula a jedna, výsledek je lichý, ale protože je tady nula a nula, tak je sudý.“

A3 Liché číslo na dvě stejné části rozdělit nelze.

Čísla 1, 3, 5, 7 atd. na stejné části rozdělit nelze, a proto na základě předpokladu, že každé číslo je buď sudé, nebo liché patří tato čísla mezi čísla lichá.

Z diskuze DI

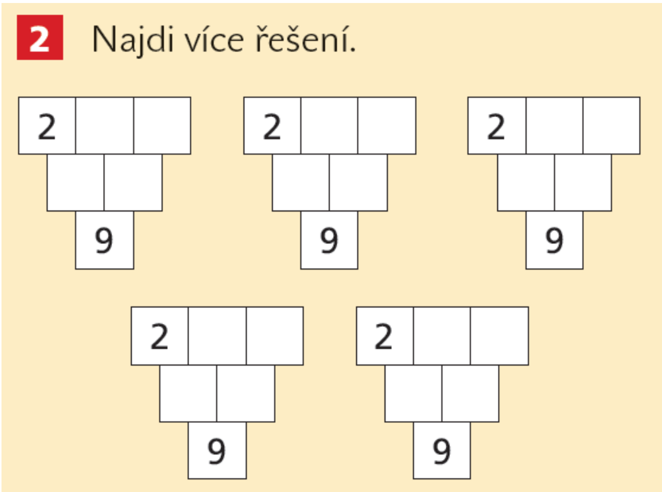
A3′ *Lichý číslo se taky dá rozdělit, ale ne na dvě stejný části* (Vojta 032, DI).

Vojta při hledání argumentu potvrzujícího A1 nachází další argument. Zdůrazňuje, že v definici sudosti je důležité slovo „stejná“, a zároveň se snaží úzký problém uchopit do konceptu polarity sudý vs. lichý. Vojta si uvědomuje, že když se o sudém čísle něco dokáže, tak to ještě nemusí být nástroj pro důkaz sudosti nuly. Může se totiž stát, že stejná věc platí také pro číslo liché. Například součet dvou sudých čísel je číslo sudé, ale i součet lichých čísel je číslo sudé.

Kromě toho vyjádření, liché číslo nelze napsat jako součet dvou stejných čísel, formuluje negativní myšlenku. Takové formulace žáci přijímají velice těžce. (Např. tvrzení, že $\sqrt{2}$ se nedá napsat jako podíl dvou přirozených čísel, je značně náročné i pro žáky 8. ročníku. Ze stejného důvodu žáci hůře přijímají také důkaz sporem.) Proto i zde Vojta místo tvrzení, že něco nelze, volí raději tvrzení, že to lze, ale jinak než je požadováno.

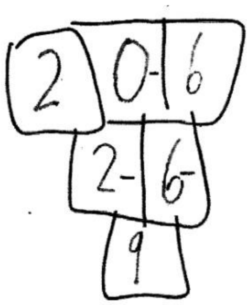
Ilustrací řečeného je následující záznam vybraný z archivu M. Hejného. Žáci 8. ročníku ZŠ měli řešit úlohu: Zjistěte, zda body [2, 5], [8, 8], [15, $\frac{21}{2}$] leží na přímce y = $\frac{1}{2}$ x + 3. Z 27 žáků 6 žáků neodpovědělo, že bod [8, 8] na přímce neleží, ale uvedlo, že bod by ležel na přímce, kdyby místo druhé souřadnice byla 7.

Obdobnou zkušenost jsem zaznamenala i v mé třídě. Pro mé žáky bylo zprvu velice obtížné přijmout, že řešením úlohy může být i to, že vůbec žádné řešení nemá. Např. v prosinci ve 2. ročníku měli žáci řešit úlohu se součtovým trojúhelníkem. V pracovním sešitě byl pětkrát předepsaný následující trojúhelník (obr. 14) a jejich úkolem bylo hledat různá řešení jeho doplnění.



Obrázek 14: Hledání různých řešení doplnění součtového trojúhelníku
(použito z Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, 2008, I. díl, s. 20, cv. 2)

V oboru přirozených čísel včetně nuly našli žáci čtyři řešení. Bylo jim však divné, proč je v učebnici předepsáno pět trojúhelníků. Předpokládali, že pokud je v učebnici připraveno trojúhelníku pět, je možné najít pět řešení. Usilovně proto znovu a znovu zkoušeli doplňovat čísla do zbylého trojúhelníku, aby nezůstal nevyplněn. Některým z nich až vadila ta představa, že by jeden z trojúhelníků zůstal prázdný. Nakonec většina své úsilí vzdala se slovy, že se zřejmě autoři učebnice spletli a jeden trojúhelník nakreslili omylem navíc. V úsilí najít páté řešení byl nejvytrvalejší Šimon. Hledal řešení po celý zbytek dne a zřejmě i pak doma. Následující den totiž přišel s řešením, které je vidět na obr. 15.



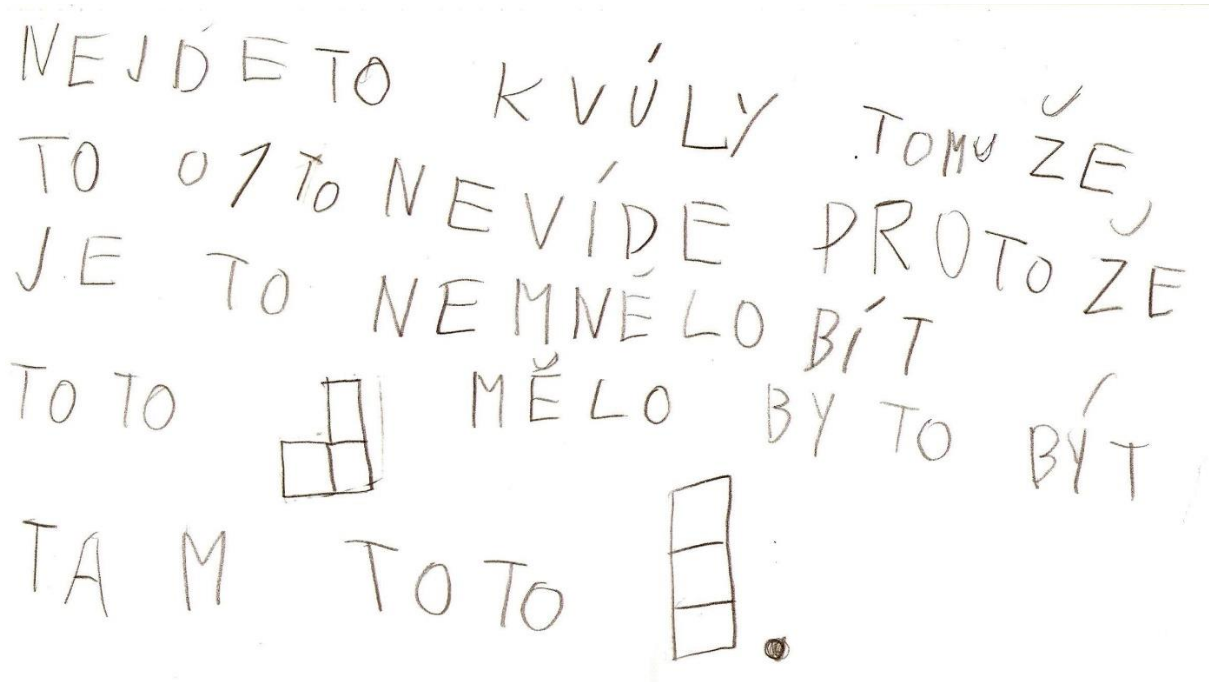
Obrázek 15: Doplnění pátého řešení trojúhelníku podle Šimona

Jak Šimon vysvětlil, čárka za číslem znamená půlku. Číslo šest s čárkou tedy znamená šest a půl. Zároveň také dodal, že půlky dají další celé číslo. Do této chvíle jsme se zlomky vůbec nepracovali. Nepřijetí možnosti, že nelze v daném číselném oboru najít další řešení, tedy nakonec vedlo k dalšímu objevu a Šimon tak učinil první krok k poznání racionálních čísel. Přijetí řešení, že žádné nebo další řešení neexistuje, přišlo až mnohem později, když se žáci s úlohami tohoto typu vícekrát setkali.

Tendenci hledat, jak by mělo vypadat zadání úlohy namísto zdůvodnění, proč její řešení nalézt nejde, se mi podařilo zachytit v květnu na konci 2. ročníku. Řešili jsme úlohu, jak danými parketami pokrýt podlahu.

Obrázek 16: Úloha z prostředí Parkety
(použito z Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, 2008, III. díl, s. 26, cv. 3)

Po několika pokusech žáci začali diskutovat o tom, že to nejde a ptali se, jestli jsou tvary skutečně správně zadané. Nakonec se usnesli, že v zadání musí být chyba a začali tvořit vlastní návrhy, jak by tvary musely být zadané, aby úloha řešení měla. Jeden z těchto návrhů uvádím i pro ukázku zde.



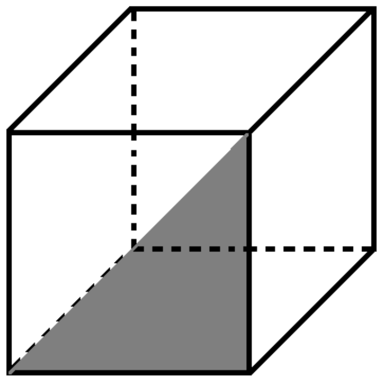
Obrázek 17: Návrh Luboše na úpravu zadání úlohy, aby měla řešení.

Luboš uvádí, že úloha nejde vyřešit, protože to o jednu nevychází. Zřejmě tím má na mysli, že při naskládání tvarů na podlahu mu ten poslední položený tvar vždy jedním čtverečkem přesahuje přes vymezený prostor podlahy. A zároveň též rovnou navrhuje, jaký tvar namísto tvaru daného by se měl v zadání objevit, aby byla úloha řešitelná.

A3″ *Tady mám jedničku, ta je lichá, ta nejde rozdělit. A tady ta mínus jednička, ta taky nejde rozdělit* (Martina 146, DI).

Vyjádření Martiny je bližší výroku A3, než je tomu u Vojty (032, DI). Martina se totiž nevyhýbá negativnímu výroku tak, jak to dělá Vojta. Výrok A3 Martina používá jako podpůrný argument pro B1 (viz dále). Používá tedy argument rytmu (B1), který převzala od Lenky (089, DI) a dává ho dohromady s tím, co řekl Vojta (032, DI). To je dokladem nejen toho, že se žáci navzájem poslouchají, ale také že je Martina schopna vytvářet kauzální řetězec myšlenek. Martina dává dohromady dvě tvrzení, která navíc ještě nepřichází z její hlavy, ale z hlavy spolužáků. Schopnost řetězit myšlenky, jestliže $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow C$, pak $A \Rightarrow C$, je klíčová schopnost matematického myšlení, která však mnohým žákům schází, jak dokládá i experiment z archivu M. Hejného.

Žáci 8. ročníku ZŠ měli řešit úlohu: Vypočítej objem krychle, pokud víš, že obsah vyznačené části přední stěny krychle je 18 cm² (viz. obr. 18).



Obrázek 18: Výpočet objemu krychle z vyznačené části přední stěny

Asi tak měsíc před zadáním této úlohy žáci řešili sérii úloh, v nichž byly zařazeny i následující tři úlohy:

1. Jaký je obsah čtverce, jestliže je rozdělen úhlopříčkou na poloviny a tato jeho polovina má obsah 32 cm²?
2. Jaká je délka strany čtverce, pokud je jeho obsah 49 cm²?
3. Jaký je objem krychle, pokud délka její hrany je 9 cm?

Do experimentu byli zařazeni pouze žáci, kteří všechny tyto tři úlohy dokázali vyřešit správně. Přesto úspěšnost řešení experimentální úlohy bylo pouhých 20%. Ukázalo se tedy, že žáci jsou schopni udělat jednotlivé kroky, ale nejsou schopni je samostatně řetězit. Příčinu lze hledat zřejmě v postupu učitelů, který jsem i běžně vídala při svých praxích. Při řešení podobných úloh strategii, jak úlohu postupně řešit, předkládal učitel (např. Tak máme polovinu obsahu čtverce, jak vypočítáme obsah celého čtverce? Když máme obsah čtverce, jak vypočítáme délku jeho strany? …) a žáci jen prováděli dané výpočty. Tímto způsobem dával učitel žákům návod na řetězec jednotlivých kroků, který ale měl probíhat v jejich hlavách, a zároveň tak i projevil nedůvěru v schopnost žáků řetězec samostatně odhalit.

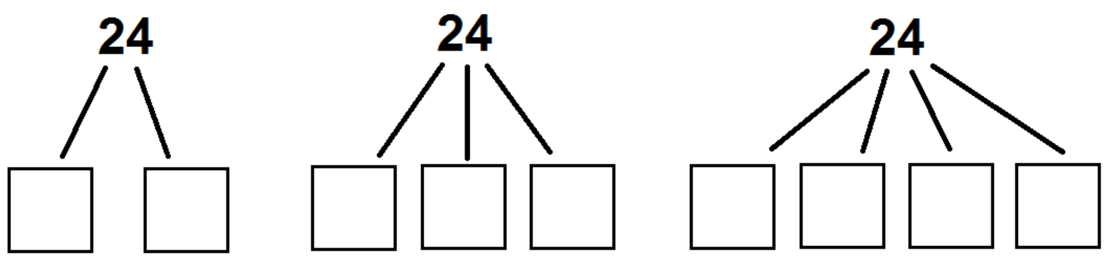
Reakce oponentů proti argumentům skupiny A

Argumenty zařazené do skupiny A (výroky A1 – A3) se v diskuzi oponentům nejevily jako příliš pádné.

Jednou z námitek bylo, že v případě sémantického vnímání prázdné množiny (NIC) jako objektu, který neleží přímo v aritmetice, nelze toto NIC rozdělovat. Toto poměrně konzistentní stanovisko malé skupinky žáků je více analyzováno v části 5.1..

Další námitka vycházela z možnosti rozdělovat nulu nejen na dvě nuly, ale i tři, čtyři atd. Pravdivé tvrzení, že nula se dá rozdělit na součet dvou nul, bylo oslabeno zjištěním, že i tvrzení, nula se dá rozdělit na součet tří nul, je pravdivé. Přitom po logické stránce toto druhé tvrzení nemůže vůbec ovlivnit pravdivost tvrzení prvního a tedy ani to, že jde o číslo sudé. Žáci si ale v tuto chvíli neuvědomili, že i jiná sudá čísla lze rozdělovat na více stejných částí než jen na dvě (např. číslo šest rozdělíme na stejné části: 6 = 3 + 3; 6 = 2 + 2 + 2; 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1).

Příčina tkví zřejmě v nedostatku zkušeností s úlohami, v nichž by žáci hledali více než jen jedno řešení rozkladu. Nápravou, ale i prevencí tohoto nedostatku by proto mohla být např. úloha: Rozděl číslo 24 na součet stejných čísel.



Obrázek 19: Rozdělování čísla 24 na součet stejných čísel

Zajímavé pokračování sledování rozdělování nuly na dvě, ale i více nul je možné najít u Lenky (275, 320, 321, DI) a Pavla (266, 269, DI). Ti sice nepopírají, že by nula byla sudá, ale zároveň dodávají, že vzhledem k možnosti jejího rozdělení i na nuly tři, je také lichá. Nula je podle nich proto lichosudá (více k tomuto problému v 4.4.).

Podobná situace se odehrává také např. při dělení se zbytkem. Když žáci řeší několik různých úloh na dělení a u všech vyjde, že výsledek je dva a zbytek jedna, jsou zaskočeni. Je jim divné, jak je možné, že výsledek a především zbytek je stále stejný. Až řešením opačného problému - vymysli různé úlohy na dělení, aby výsledek byl dva a zbytek jedna - začnou postupně chápat, že nejde jen o jedno číslo, ale o celou množinu čísel.

Zaváhání v přijetí argumentů skupiny A vycházelo také ze skutečnosti, že při rozdělování nuly dostáváme opět nulu, která se žákům zdála být přinejmenším podezřelá. Tímto problémem se opět více zabývá část 5.1..

4.1.5. Skupina B: Rytmus

Argument rytmu se ve výrocích žáků objevil ve dvou kontextech. Nejprve žáci sledovali pravidelné střídání sudých a lichých čísel na číselné ose, později v aritmetické posloupnosti s diferencí 5. Jev rytmu však vstupoval i do dalších představ jako např. do narůstajícího počtu nul při jejím rozdělování (viz dále v Další výpovědi, v nichž je jev rytmu přítomen).

Argumenty skupiny B přinesly rozšíření číselného oboru o záporná čísla. O záporných číslech v předchozí argumentační skupině A nebyla řeč, a to pravděpodobně proto, že z manipulativního hlediska záporná čísla rozdělovat (skládat) na dvě stejná čísla nejde.

B1 Sudá a lichá čísla se na číselné ose rytmicky střídají a v tomto rytmu je nula na pozici sudých čísel.

Jako další argument pro sudost nuly posloužila představa číselné osy a pravidelného střídání sudých a lichých čísel na ní.

<u>Z diskuze DI</u>

B1′ *Jak máme od jedničky čísla za sebou, tak je to vždycky sudý, lichý, sudý, lichý. Ale kdyby byly dvě za sebou lichý, tak už by to nebylo jakoby to [střídání]* (Lenka 089, DI).

V první větě výroku Lenka formuluje argument rytmického střídání sudých a lichých čísel na číselné ose. Jak ale vyplývá z druhé věty „kdyby byly dvě za sebou lichý“, uvažuje jen o nezáporných číslech.

O argumentu rytmu B1 Lenka nepochybuje. Snaží se však najít i argumentaci pro podporu, že se to takto střídat musí. Druhou větou výroku tedy ještě prohlubuje argument B1. Pomocí slova „kdyby“ Lenka správně používá nepřímý důkaz. Připouští možnost, že by vedle sebe mohla stát dvě lichá čísla, ale zároveň říká, že by to bylo špatně.

Výrok Lenky není ukončen. Závěr sporu (nemožnost dvou lichých čísel za sebou) totiž nemá zatím v argumentační oblasti, v oblasti matematických termínů, ale v oblasti pocitů. Ve vývoji matematiky k podobným argumentačním řetězcům také dochází a výsledkem takové úvahy je převedení problému A na problém B. Například problém rovnoběžek byl takto převeden na problém součtu úhlu v trojúhelníku a později i na problém existence přímky, která celá leží uvnitř ostrého úhlu. O této poslední myšlence Saccheri napsal: „To je proti přirozenosti přímky“ (Saccheri, 2014, s. 155). Tento jeho finální argument je pocitový stejně jako argument Lenky. V případě Lenky došlo k převedení problému - Je nula sudá? - na problém - Mohou být na číselné ose dvě lichá čísla vedle sebe?

B1″ *Od nuly mám nahoru a pak mám ještě dolu* (Martina 132, DI). *Ta nula by měla bejt jako sudá, protože tady mám jedničku, ta je lichá. Pak dvojka, ta je sudá. A tady ta mínus jednička, ta taky nejde rozdělit* (Martina 146, DI). *Takže je to prostě lichý, sudý, lichý, sudý* (Martina 149, DI). *Tak se to střídá. Protože to by bylo trošku divný, kdyby byly, takhle by musely bejt tři vedle sebe stejný* (Martina 154, DI).

Martina navazuje na argument rytmického střídání sudých a lichých čísel na číselné ose, jak o něm mluvila již Lenka (089, DI). Sílu tohoto argumentu však Martina ještě umocňuje rozšířením číselného oboru o záporná čísla. Kdyby byl totiž rytmus zakončen v nule, tedy kdyby byl posuzován jen pro kladná čísla, nebylo by z toho jasné, zda tento rytmus pokračuje i do nuly. Avšak protažením i do záporných čísel se nula dostává dovnitř rytmu, a tak je jasné, že musí být sudá. Výpadek z rytmu sudý, lichý, sudý, lichý... totiž už sám o sobě působí jako chyba. Pokud bychom tento rytmus navíc ještě zvýraznili barevně (např. sudá čísla modře a lichá červeně), bude argument rytmu ještě sugestivnější.

Jak tomu bylo i u Lenky (089, DI), jde zde opět o intuitivní použití důkazu sporem („kdyby byly...“). Oproti Lence však Martina rozšířením číselné osy i o záporná čísla ukazuje, že kdybychom připustili, že nula je číslo liché, pak bychom měli vedle sebe dokonce tři lichá čísla (mínus jedna, nula, jedna). A narušení tohoto řádu střídání sudých a lichých čísel by bylo divné.

Z diskuze DII

B1‴ *Je to sudý, protože můžu počítat třeba do miliardy, a pořád se mi střídá, sudý, lichý* (Ondra 202, DII).

Ondra se vrací ke sledování rytmického střídání sudých a lichých čísel na číselné ose. Se spojením „počítat do miliardy“ jsem se u svých žáků setkala mnohokrát. A tak jako oni i Ondra používá zde toto spojení jako idiomatické vyjádření, že jde o všechna přirozená čísla. Záměrně nepoužívá slovo nekonečno, protože v něm cítí až něco mystického, tedy něco, co se vymyká životní zkušenosti, jako když třeba řekneme věčnost. Slovo nekonečno by tedy oslabilo jasnost jeho výroku. Miliarda oproti nekonečnu představuje konkrétní číslo, ke které žák ví, že se po dlouhém úsilí dá dopočítat. Na druhou stranu je ale tak veliká, že se dá předpokládat, že pokud zde pravidelnost funguje až do miliardy, bude fungovat i dále za ní. Použití spojení počítat do miliardy tedy znamená na jedné straně obecný kvantifikátor pro všechna přirozená čísla, ale na druhé straně není zahaleno mystikou tak, jak je tomu u nekonečna.

Ondra tak slovy „můžu počítat třeba do miliardy“ ukazuje, že od nuly ve směru kladných čísel pokračuje pravidelné střídání sudých a lichých čísel až do nekonečna. A sudost nuly tedy vyplývá ze sudé pozice v tomto rytmu, na níž stojí.

B2 Sudá a lichá čísla se v aritmetické posloupnosti čísel s diferencí pět rytmicky střídají a v tomto rytmu je nula na pozici sudých čísel.

Z diskuze DII

B2′ *Takže je ta nula sudá, protože tam se střídá sudá, lichá, sudá, lichá* (Vojta 156, DII).

Původní myšlenku rytmu B1 Vojta aplikuje i na čísla na severu růžice. V případě, že má totiž růžice pět vrcholů, dochází zde také k rytmickému střídání sudých a lichých čísel. Patnáctka je lichá, desítka je sudá, pětka je lichá, a proto další v pořadí nula je sudá. Nejde tedy o žádnou skupinu sudolichých čísel, jak se pokoušel ukázat Šimon (151, DII). Jak Vojta doslova říká (159, DII), modifikace růžice na pět vrcholů sudost nuly jen potvrzuje.

B3 Mezi dvěma sousedními lichými čísly musí být číslo sudé.

<u>*Z diskuze DI*</u>

B3′ *Mínus jedna je lichá. A mezi tím musí bejt nějaký sudý* (Ondra 216, DI).

Ondra říká, že záporná jednička je lichá. I když to nevyslovuje, v jeho hlavě je také, že i kladná jednička je lichá. Mezi kladnou a zápornou jedničkou je nula. A stejně tak jako platí po celé délce osy, že mezi dvěma sousedními lichými čísly je číslo sudé, musí být i nula sudá.

B4 Sousedním číslem čísla lichého je číslo sudé a sousedním číslem čísla sudého je číslo liché.

<u>*Z diskuze DII*</u>

B4′ *Pětka je lichá, a předtím je ta nula sudá* (Ema 166, DII).

Ema si osvojuje Vojtův argument (153, 156) rytmického střídání sudých a lichých čísel v aritmetické posloupnosti s diferencí 5. Formuluje ho však vlastními slovy jako zaměření pozornosti jen na nulu a její sousední číslo, tedy pětku. A jelikož pětka je lichá, tak nula při zachování pravidelnosti střídání sudých a lichých čísel musí být sudá.

I když tedy Ema přebírá myšlenku od Vojty, je znát, že jí rozumí, protože ji artikuluje vlastním způsobem a i zapojuje svou úvahu. Myšlenku přenáší do jiné úrovně, z úrovně globální (posloupnost čísel) do úrovně sousední čísla vedle sebe. Je tedy patrné, že u ní dochází k osvojení myšlenky s porozuměním.

Reakce oponentů proti argumentům skupiny B

Za hlavního oponenta smyslu vůbec rozlišovat sudost a lichost nuly lze v DI považovat Matěje. Proti výroku B1 (případně B3) však žádný protiargument nenachází. Doposud vystačil jen se základní myšlenkou, že s nulovým počtem nejde nijak manipulovat. Z jeho strany jde ale především o víru, že tomu tak je, než že by šlo o myšlenku podepřenou argumenty. To je zřejmě i příčinou toho, proč začne hledat rozřešení problému u učitelky (Matěj 162, DI).

Argumenty opírající se o jev rytmu vycházejí ze struktury celých čísel a v rámci této struktury ukazují, že nula je sudá. Výrok B1 leží ve struktuře číselné osy, a to je i dalším důvodem toho, proč Matěj, který se drží pouze sémantiky, s názorem, že s nulou nelze nijak operovat, do protiargumentace nyní nevstupuje.

Proti rytmu na číselné ose se ale v DI postavila myšlenka, že nula stojí mimo ostatní čísla číselné osy. Žáci, kteří sice vycházejí ze struktury čísel, mají zkušenost s tím, že existují vlastnosti, které platí pro všechna čísla, ale pro nulu ne. Například dělit se dá jakýmkoli číslem, ale nulou se dělit nedá. Mají tedy zkušenost s něčím, co nulu vymezuje ze struktury ostatních čísel. A pokud máme jednu takovou zkušenost, je možné, že tomu tak bude i v dalších případech. Někteří tedy zřejmě přenášeli výjimečnost nuly při dělení i na problém se sudostí a lichostí čísel. Při tom T1 nezpochybnili tím, že by nula nebyla sudá nebo byla lichá, ale zkrátka o ní nejde nic říci. Stejně tak jako je tomu např. v zápise 5 : 0, který nemá smysl.

Na základě těchto úvah tedy nulu nejde započítávat do rytmu střídání sudých a lichých čísel na číselné ose. Sudá i lichá čísla se střídají od nuly ve směru kladných čísel a od nuly ve směru záporných čísel. Ale sama nula stojí stranou jako určitá hranice (přechod) mezi kladnými a zápornými čísly. Tato myšlenka není v protokolu přesně zachycena a zřejmě nebyla ani mimo záznam nějak více prodiskutovávána. Důkazem, že se v diskuzi objevila, je ale například vstup učitelky (155, DI), který reaguje na někoho, kdo však v záznamu zachycen nebyl. Je však možné, že takto vnímá nulu také Šimon (095, DI).

095 Šimon: To máš jedna, mínus jedna, mínus jedna, to je oboje lichý, že jo.

Ze Šimonova vstupu je jeho myšlenka velice obtížně analyzovatelná. Vzhledem k tomu však, že slova „mínus jedna, mínus jedna“ říká ve velice rychlém sledu za sebou, mohlo by jít v obou případech o operátory, nebo o operátor a adresu. Jeho intonace by spíše napovídala, že v obou případech jsou slova mínus jedna myšlena jako operátory, tedy jako kroky po číselné ose od jedničky směrem k záporným číslům. Otázkou ale zůstává, co znamená, že „to je oboje lichý“? Pokud by druhé „mínus jedna“ bylo adresa stejně jako „jedna“ na začátku, znamenalo by to, že se jedním krokem dostává z jedničky do mínus jedničky. O nule jako další adrese či mezníku pro krok na číselné ose by pak vůbec neuvažoval. Na kladná čísla by se tedy díval jako na řadu čísel začínající od jedničky a na záporná čísla jako na čísla začínající od mínus jedničky. Nulu by proto neviděl. Tuto úvahu podporuje i fakt, že v okamžiku jeho vstupu není číselná osa na tabuli ještě nakreslena (na tabuli se objevuje až po vstupu Martiny 146).

To, že by Šimon nulu vynechal, se může jevit dost nepravděpodobné. Ale vzpomeňme například na časovou osu naší historie, která dělí události na před naším letopočtem a našeho letopočtu. Ani historikové tedy při tvorbě kalendáře o roku nula neuvažovali, a tak je možné, že i Šimon přemýšlí obdobně.

Pomoc by žákům v tomto případě mohla následující série úloh odehrávajících se na krokovací číselné ose[54]:

1) Alenka stojí na čtyřce. Kryštof stojí na jedničce. Kolik kroků musí Alenka udělat, aby stála tam, kde Kryštof?
2) Vilém stojí na trojce. Terezka na nule. Kolik kroků musí udělat Vojta, aby stál tam, co Terezka?
3) Marta stojí na dvojce. Jakub stojí na mínus jedničce. Kolik kroků musí udělat Marta, aby stála stejně jako Jakub?

Tato série tří gradovaných úloh je sestavená tak, aby došlo k odhalení, že i nula jako adresa na číselné ose patří do struktury celých čísel. První úloha se odehrává jen v kladných celých číslech, v druhé úloze se již vstupuje na nulu a ve třetí se přes ni přechází. Z těchto úloh je tak patrné, že se nula nepřeskakuje a je tedy právoplatným členem celých čísel v aditivní struktuře. Jinak by totiž docházelo k jasným disharmoniím. Úlohy na Krokování zdůrazňují aditivní strukturu celých čísel, a to tak, že ji sémantizují. Jde tedy o úlohy aditivní a sémanticky kotvené. Navíc v těchto úlohách hraje význam i jejich psychologická sugesce daná propojením s dramatizací. Domnívám se proto, že po vyřešení předložené série úloh by Šimon ani nikdo další nenamítal, že mezi jedničkou a mínus jedničkou není nic.

V DII proti rytmu sudých a lichých čísel na číselné ose a ani v posloupnosti čísel na severu pěticípé růžice žádné námitky nevznikly. I když v tomto druhém případě trvalo déle, než všichni rytmus sudých a lichých čísel v posloupnosti čísel 0, 5, 10, 15, 20 odhalili.

[54] Krokovací číselná osa je pás, na němž jsou jako příčky vyznačena kladná a záporná celá čísla včetně nuly a žáci pohybem po ní řeší různé typy úloh. Přičemž jako krok se počítá přesun z jedné příčky na sousední příčku.

Další výpovědi, v nichž je jev rytmu přítomen

Pokud nebudeme sledovat jen správné cesty vedoucí k objevu, je možné, že první úvaha o rytmu zazněla již od Šimona (043) v DI.

<u>*Vstupy, předcházející vstup Šimona 043:*</u> *036 Marek: [...] ale v desítce je taky nula a je to sudý.* *038 Vojta: No, ale tam je, tam je ještě ta jednička.* *039 Matěj: No, pani učitelko.* *040 Nela: A ta je lichá.* *041 Ema: No, že jo.* **043 Šimon: Ale musí se to střídat, že jo.** <u>*Vstup následující po Šimonovi:*</u> *044 Marek: Ale ta nula je sudá.*	Je obtížné s jistotou říci, co Šimon svým vstupem myslel. Možná ale, i vzhledem k předcházejícím vstupům spolužáků, hledá rytmické střídání sudých a lichých číslic uvnitř vícemístných čísel. V tomto případě si však nemyslím, že by šlo o nějaký jeho konzistentní názor, který by zastával, ale spíše o chvilkový nápad, který se náhle zrodil v jeho hlavě, když zaslechl, že v desítce je nula sudá a před ní jednička lichá. Je však také možné, že při slovech „musí se to střídat“ myslí na řadu čísel 10, 20, 30 atd., v níž skutečně dochází ke střídání lichých a sudých číslic na prvních pozicích čísel. Každopádně vstupu Šimona nevěnuje nikdo další větší pozornost. Přechází ji i Marek (044), který se vrací k významu sledování pouze posledních číslic čísel při určování jejich sudosti.

Užití rytmu je v diskuzi zachyceno také u Pavla (266, 269) v DI, který byl zřejmě natolik ovlivněn rytmickým střídáním sudých a lichých čísel na číselné ose, že jej chtěl vložit i do další situace, aby tím více podpořil svá tvrzení.

266 Pavel: Jo. Že nul je nekonečno, takže vlastně to jde popořadě. Jedna nula, dvě nuly, tři nuly, čtyři nuly, a to jsou jako čísla. Takže nula jedna je lichá a potom dvojka je sudá, takže *(odmlčí se).*	Pavel vychází z postupného rozkládání nuly na dvě nuly (0 = 0 + 0), tři nuly (0 = 0 + 0 + 0), čtyři (0 = 0 + 0 + 0 + 0) až nekonečno nul. Z hlediska matematiky mu chybí 1. člen této posloupnosti 0 = 0, ale ten by z jeho pohledu určitě nepovažoval za rozklad. V jeho prvním rozkladu nuly na součet dvou nul považuje nulu za sudou, ve druhém pak za lichou a dále opět za sudou. Jev rytmu tedy nesprávně aplikuje do pravidelného střídání výroků – nula je sudá, nula je lichá, nula je sudá atd., z čehož mu pak vyplývá, že nula je lichosudá (více 4.4.).
269 Kája: Já vim, ale když je třeba, vezme se to, máme jednu nulu, potom máme dvě nuly, potom máme tři nuly, takže jednička je lichá, dvojka je sudá a trojka je taky lichá.	

Jak naznačují tyto ukázky, jev rytmu žáci považovali za silný argument. Někteří se ho proto snažili vkládat i do situací, pro něž nebyl vhodný. Ukázky myšlenkově vadných vstupů tedy představují jakési slepé odbočky na cestě za poznáním. Jsem ale přesvědčena, že i tyto mylné myšlenky mají při objevování svůj význam. Nejednou se v našich diskuzích ukázalo, že i špatně postavená představa nakonec vedla k objevení správné, a dokonce mnohem hlubší myšlenky. Domnívám se proto, že jestliže učitel v okamžiku objevení se chybné domněnky, žáka na jeho chybu upozorní, má to přinejmenším dva negativní dopady.

Kdybych v tomto případě Šimona nebo Pavla, upozornila na nedostatky v jejich úvahách, jistě by to brali jako výtku, že udělali chybu. Upozornění na chybu je vždy více či méně spojeno s negativními emocemi. A o to více, když na ni upozorní autorita jako třeba učitel. Navíc si myslím, že kdybych Šimonovi a především Pavlovi, který déle hledá odvahu před třídou promluvit, chybu, které se dopustili, i jen naznačila, oslabila bych tím zároveň jejich víru ve vlastní schopnost objevovat a stejně tak snahu se do diskuze zapojovat. Pokud ale nechám o chybě mluvit žáky mezi sebou, citový tlak na autora chyby už zdaleka nebude tak silný.

Vstupem učitele by také došlo k přerušení poznávacího procesu, který sice vedl do slepé uličky, ale byl autentický. Je to to samé, jako když ve tmě na chodbě člověku upadnou klíče. Pokud jej někdo navede, jak je najít, sice je najde rychleji, ale jeho schopnost hledání se nijak dále nerozvíjí. Zatímco když mu nezbývá nic jiného než si klíče nalézt sám, napříště si při hledání bude počínat zase o něco lépe. A když pak klíče ztratí již po několikáté, bude mít i techniku, jak při hledání co nejefektivněji postupovat. Pokud tedy žákovi řeknu, že jde špatně, a postavím ho na správnou cestu, znesnadním mu tak další prodlužování jeho myšlenek i hledání jejich důsledků.

Musím však přiznat, že jako učitelka jsem občas řešila dilema, zda je správné připustit, aby ve třídě chybné argumenty zaznívaly bez korekce a někdy je dokonce takto nechat v hlavách žáků i několik dní. Doposud však vždy, když jsem vydržela a nezasáhla do formování poznání žáků, i když zprvu šlo jednoznačně špatnou cestou, žáci společně časem tu správnou cestu našli. Buď někteří žáci ukázali, že chybný objev nefunguje, nebo i autor chyby na nedostatky přišel sám třeba na základě řešení nových problémů. Příprava těchto nových problémů je způsob, jak může učitel svým žákům pomoci, když vidí, že bloudí. Najít nebo vymyslet takovou vhodnou úlohu, v níž se žáci budou moci na problém podívat z jiného úhlu, považuji však ve většině případů za velice obtížné.

4.1.6. Skupina C: Nula jako číslice na místě jednotek

Do této skupiny jsou zařazeny myšlenky žáků čistě strukturální povahy všímající si nuly jako součásti čísel 10, 20, 30, atd. a využívající této skutečnosti jako argumentu pro sudost nuly.

C1 Vícemístná čísla končící nulou jsou sudá.

Z diskuze DI

C1′ *V desítce je taky nula a je to sudý* (Marek 036, DI).

Marek poukazuje, že nula jako číslice je v čísle deset a pravděpodobně má na mysli obecnější tvrzení C1. Tuto skutečnost vnímá jako argumentaci sudosti nuly.

Z diskuze DII

C1″ *Vždycky na konci, když píšeš deset, tak je tam nula, když píšeš dvacet, tak je tam taky nula, a všechno je to sudý* (Vojta 133, DII).

Vojta přichází s myšlenkou, o které mluvil Marek (036) už v DI. Tehdy ale Vojta zpochybňoval C1, protože se v desítce nedíval jen na poslední číslici, a tak tvrdil, že v desítce je i jednička, která je lichá (038, DI). Vstup Marka (044, DI) však zřejmě inicioval Vojtu, aby znovu C1 zvážil a odhalil tak svou předchozí mýlku.

I v rámci tohoto jednoho tvrzení je tedy patrný posun ve Vojtových úvahách daný citovou zaangažovaností do problému v touze zjistit, kdo má vlastně pravdu. Vojta zpracoval konflikt mezi tím, co říkal Marek (036, DI) a svou původní představou, svou chybu přehodnotil a nyní již vystupuje s tvrzením C1, jako by bylo jeho vlastní.

Reakce oponentů proti argumentům skupiny C

Proti myšlence Marka (036, DI), že pokud číslo deset je sudé, tak i nula na jeho konci je sudá, se ozývá Vojta (038, DI) a k němu se přidají ještě Matěj (039, DI), Nela (040, DI) a Ema (041, DI).

038 Vojta: No, ale tam je, tam je ještě ta jednička.
039 Matěj: No, pani učitelko.
040 Nela: A ta je lichá.
041 Ema.: No, že jo.
043 Martin S.: Ale ta nula je sudá.

Vojta (038) si všímá nejen poslední číslice čísla deset, a proto upozorňuje, že je tvořeno i jedničkou, která je ovšem lichá, jak doplňuje Nela (040). Marek (043) na to však velice pohotově reaguje, že pro určení sudosti čísla, je nutné se dívat pouze na nulu na konci. Jako protiargument však mohl ještě uvést více dvoumístných čísel jako např. 12, 14, 16 atd., které jsou sudé a také začínají jedničkou. Pak by bylo ještě více patrné, že sudost čísla závisí pouze na jeho poslední číslici.

V DII již ale sám Vojta (133, DII) uvádí tvrzení C1 jako argument pro sudost nuly. A nyní již nikdo proti C1 nevystoupí.

4.1.7. Skupina D: Aditivní a multiplikativní struktura sudých a lichých čísel

Skupině D náleží argumenty, v nichž se objevuje některý ze strukturálních vztahů mezi čísly, jimiž se žáci snaží doložit sudost nuly.

Aditivní vztahy čísel: sudé + sudé = sudé (viz D1, D4, D5)
sudé + liché = liché (viz D2, D5)
liché + liché = sudé (viz D3, D4)
(Případně modifikovány na sudé – sudé = sudé atd.)

Multiplikativní vztahy čísel: sudé · sudé = sudé
liché · liché = liché
sudé · liché = sudé (viz D6)

O aditivní struktuře čísel v DI v rámci celé třídy mluví pouze Amálka (229, DI). V DII ale s tímto argumentem přichází Vojta (177, 179, DII) a k němu se přidává i několik další žáků. Dochází tak k opětovné mobilizaci myšlenky z předchozí diskuze, k jejímu posouzení, prodiskutování a přijetí jako významného argumentu pro sudost nuly, jak ukazuje celá série vstupů 177, 179 – 198 a 207 v DII. V uvedených vstupech je navíc aditivní vztah sudých čísel rozšířen i o další vztahy aditivní struktury. Kromě toho se objevuje i náznak pokusu hledat oporu pro sudost nuly v multiplikativní struktuře (Lenka 173, DII). Tato myšlenka však jako plnohodnotný důkaz sudosti nuly v rámci DII nebyla zcela dokončena.

Argument Amálky tedy spolužáci od ní přebrali, stal se součástí jejich vědomí a dále se vyvíjel. Tento jev Hejný (2014) označuje jako kognitivní osmóza[55]. Nové poznání tak žák může získat i přebíráním od svých spolužáků.

[55] Spojení kognitivní osmóza je v současné době používaným termínem pro značení popisovaného jevu. Jak ale sám Hejný uvádí (2014, s. 43), nepovažuje toto označení za nejšťastnější a možná tedy v budoucnu bude nahrazeno příhodnějším termínem.

Objevení se využívání struktury čísel v argumentaci žáků je dokladem jejich porozumění matematice, protože žáci sami dospívají k tomu, že sledování problému přes strukturu umožňuje mnohem hlubší pohled do problému.

D1 Sudé číslo plus sudé číslo je opět číslo sudé.

Z diskuze DI

D1′ *Sudý plus sudý mi dá sudý. Kdyby nula byla sudá, tak mi to dá taky sudý, protože nula plus nula se rovná nula* (Amálka 229, DI).

Amálka tento výrok předkládá v domnění, že podává matematický důkaz sudosti nuly. Ve skutečnosti tomu tak není. Amálčin výrok je v zajetí logické chyby, která je ale běžná i u mnohem starších žáků a studentů. Např. z tvrzení „když prší, ulice jsou mokré“, neplyne, že jsou-li ulice mokré, muselo pršet. Jestliže tedy pro množinu sudých čísel, *S*, platí, že součet čísel z *S* je opět číslo v *S*, nemůžeme předpokládat, že každé číslo v *S* je součtem čísel z *S*. Není pravda, že z implikace $A \Rightarrow B$ plyne $B \Rightarrow A$

Amálka zjistila, že mezi obecným výrokem o sudých číslech (sudý + sudý = sudý) a konkrétním výrokem o nule (0 + 0 = 0) platí jakýsi vztah. To je pozitivní, protože vztah mezi obecnými a konkrétními výroky je jedna z logických figur našeho myšlení. Ona se však mylně domnívá, že tento vztah je důkazem pro sudost nuly. To už ale pravda není. Podobně jako když malé dítě na otázku, kolik je hodin, odpoví sedm, i když jsou třeba čtyři hodiny, říká důležitou věc. Ukázalo totiž, že si již uvědomuje, že na otázku kolik se odpovídá slovem z oblasti číslovek, a ne třeba z oblasti barev. Stejně tak se Amálka domnívá, že pokud je tvrzení 0 + 0 = 0 konkrétním případem obecného tvrzení sudý + sudý = sudý, tak z toho vyplývá, že nula je sudá. Nesprávnost tohoto úsudku je lépe vidět, pokud například použijeme obecný výrok: liché číslo krát liché číslo je číslo liché. Pokud bychom i tento obecný výrok aplikovali na nulu, tak konkrétním výrokem by bylo: nula krát nula se rovná nula. A z toho by tedy vyplývalo, že nula je lichá. Tato logická nepřesnost, které se dívka dopouští, je však na takové abstraktní úrovni, jež je pro běžného žáka 1. stupně ZŠ v podstatě nedostupná (dostupná začíná být pro žáky až někdy v 7. nebo 8. roč. ZŠ, ale i tak jen pro některé).

Jak již bylo řečeno, Amálka je o sudosti nuly přesvědčena, a to je jedna ze základních překážek dokazování. Najít důkaz pro něco, co je zřejmé, je totiž často mnohem obtížnější, než najít důkaz pro něco, o čem pochybujeme. Žáci proto například nechápou, proč mají dokazovat to, co je na první pohled jasné. Jako např. jestliže přímka *a* || *b* a *b* || *c*, pak platí *a* || *c*. I pro Amálku je nalezení důkazu obtížné, a tak podává spíše jakési evidence, které nejsou v rozporu s faktem, že nula je sudá.

Jako doklad svého přesvědčení se snaží použít i nepřímý důkaz použitím slova „kdyby“ v poslední větě svého vstupu. Dívka ví, že slovo „kdyby“ se používá u argumentace, ale ona ho oproti Lence (089, DI) a Martině (154, DI) používá nesprávně. Pokud by mělo totiž jít o nepřímý důkaz, musela by věta začínat např. slovy: Kdyby nula byla lichá, tak.... Ona je však o sudosti nuly přesvědčena. A teď jen hledá způsob, jak o tom přesvědčit i ostatní. Přestože však vazbu nepoužívá zcela správně, je tato její snaha velice cenná. Věří, že existuje způsob jak věc, kterou považuje za evidentní (nula je sudá), dokázat spolužákovi. A i když tedy toto dokazování zcela neodpovídá požadavkům logiky, prvořadá je zde její motivace argumentovat.

Z písemného záznamu Martiny

D1″ *Když sečteme sudé a sudé číslo, vyjde sudé: S + S = S (2 + 0 = 2). A tím pádem, kdyby byla lichá, tak by to nevyšlo* (1. verze).

Stejně jako tomu bylo u Amálky (229, DI) ani Martina zde úplný důkaz sudosti nuly nepodává, i když je přesvědčena o opaku. Ze vztahu, že součet dvou sudých čísel je sudý, ještě nevyplývá, že nula je sudá. Aby podala matematicky přesný důkaz, měl by její výrok spíše znít jako D2. Není ale vyloučeno, že v její hlavě tato myšlenka byla, jen ji ještě nebyla schopna správně naformulovat. Oproti Amálce se jí však podařilo lépe vyslovit nepřímý důkaz pomocí slova kdyby.

Mnohem důležitější než podání správného důkazu je zde však záměr Martiny. (ale i dříve Amálky 229, DI) nahlížet na jev sudosti a lichosti z hlediska struktury. První nahlížení struktury se v diskuzi objevilo v okamžiku, když žáci začali uvažovat o střídání sudých a lichých čísel na číselné ose (B1). Předcházející úvahy o rozdělování nuly (A1) totiž nevedly ke chtěným výsledkům vzhledem k protiargumentům, že nula chápaná sémanticky vůbec rozdělovat nelze.

Martina zde ale přichází ještě s hlubším strukturálním pohledem, než byl rytmus. Přirozená nebo dokonce celá čísla splňují dva následující zákony: Součet dvou sudých čísel je vždy sudý. Součet sudého a lichého čísla je vždy lichý. Oba tyto zákony jsou hodně abstraktní, ale Martina se k nim snaží dostat. Zřejmě cítí, že silný důkaz pro sudost nuly dostaneme ze strukturálních tvrzení. Druhý ze jmenovaných zákonů Martina nezmiňuje, ale do izolovaného modelu součtu sudých čísel 2 + 0, který udává, ještě vkládá myšlenku, že „kdyby nula byla lichá“, tedy kdyby šlo o součet sudého a lichého čísla, výsledek by muselo být číslo liché, ale tomu tak není. I když Martina tyto souvislosti přesně nesděluje, jistě je intuitivně tuší. Přesto je ale potřeba dodat, že její zaměření uvažování do struktury aritmetiky (součet sudých čísel je číslo sudé a součet sudého a lichého čísla je číslo liché) je přesné.

Z diskuze DII

D1‴ *Když sečtem dvě sudý, tak nám vyjde sudá* (Ondra 180, DII).

Ondra navazuje na vstup Vojty (179, DII; zařazen k D2) a ukazuje svůj způsob intepretace jeho vstupu jako aditivní strukturální vztah součtu sudých čísel.

Z informačního hlediska je výrok Ondry totožný s D1′ a D1″. Odlišuje se pouze použitím číslovky dvě. Neříká „sudý plus sudý“, ale „sečtem dvě sudý“. Stejný případ nastává, když žáci např. při zápisu pohybu po krokovacím pásu zapíší | 3→ | 2← | namísto původního vypisování všech šipek | →→→ | ←← |.

D2 Přičteme-li k neznámému číslu číslo sudé a dostaneme číslo sudé, pak je i toto neznámé číslo sudé.

Tvrzení D2 přináší korektnější důkaz sudosti nuly, než tomu bylo u D1.

Z diskuze DII

D2′ *Nula je určitě sudá, protože když si přičtem k nule dvojku, což je sudý, tak je to dvojka, a to je taky sudý* (Vojta 177, 179, DII).

Kostrbatá řeč Vojty je pravděpodobně výsledkem naprosto správné úvahy. V korektní formulaci by jeho myšlenka zněla, je-li x + sudé = sudé, pak x je sudé. Vojta ve výpovědi za neznámé číslo x dává nulu a za první slovo sudé dává dvojku. K nule přičte dvojku a vyjde mu číslo sudé. Z implikace, že přičtu-li k neznámému číslu číslo sudé a vyjde mi sudé, pak neznámé číslo je sudé, vyplývá, že nula je sudé číslo.

D3 Sudé číslo plus liché číslo je číslo liché.

Tvrzení D3 v kombinaci s D1 bylo žáky vnímáno jako další doklad sudosti nuly.

Z diskuze DII

D3′ *Nula plus jedna je pořád jedna, což vyjde lichý* (Ondra 191, DII).

Výrok Ondry představuje speciální případ D3, protože to sudé číslo je nula. O sudosti nuly je přesvědčen a teď se jen snaží dodat dostatečný argument. O jedničce, že je lichá, se ani nezmiňuje, protože to říkal už Bořek (189, DII).

Tímto výrokem Ondra navazuje na předchozí vstupy spolužáků, kteří diskutovali o součtu lichých čísel. Ondra nulu považuje za jednoznačně sudou a v dalších argumentech spolužáků ihned cítí zárodek případného útoku na sudost nuly (proto i v celém znění vstupu používá slovo ale).

D3″ *Když to sečtu s pětkou, nula a pět, tak to je pět, takže sudý a lichý je vždycky lichý číslo* (Vojta 198, DII).

Vojta začíná uvedením izolovaného modelu (nula a pět je pět), aby tak doložil generický model (součet sudého a lichého čísla), jehož vyvození chce ukázat. Slovem „vždycky“ zdůrazňuje, že není možná jiná varianta, když sčítáme sudé a liché číslo.

D4 Liché číslo plus liché číslo je číslo sudé.

Z diskuze DII

D4′ *Lichý a lichý může bejt sudý číslo* (Vojta 207, DII).

V tvrzení Vojty, jakož i v celém jeho vstupu 207 a ve vstupu 198, se objevuje nesprávné používání modálního slovesa moci. Tím, že Vojta řekne „může bejt“ sudý číslo, v podstatě nevyvrací, že by součet mohl být i liché číslo. Správně matematicky by tedy měl říci, že liché a liché číslo musí být číslo sudé. Přesto se ale domnívám, že jeho myšlenky jsou správné, jen v jejich artikulaci naráží na ne zcela správně zažité užívání sloves: může, nemůže, musí a nesmí. Spojení „může bejt sudý“ tedy chybně považuje za protiklad ke spojení „nemůže být lichý“.

Jak je i zde naznačeno, někdy může být velice těžké rozlišit dobré myšlení od nesprávné artikulace, a proto špatné užití slov tedy nemusí vždy znamenat chybné myšlení. Kdybych však jako učitelka Vojtu opravila, že vhodnější by bylo použití slovesa „musí“, asi by to i přijal, ale pravděpodobně by si neuvědomil, v čem bylo jeho vyjádření nesprávné. Domnívám se také, že postupným naformulováváním myšlenek během své řeči, byl Vojta natolik soustředěn na hlídání matematických vazeb, že mu již nezbývala energie na jazykovou korekci. Asi tedy ani nevnímal, jaká slova přesně volí, a tedy jestli logicky správně odhalují podstatu toho, co chce říci. Je tedy možné, že v jiné situaci, která pro něj není tak energeticky náročná, s používáním těchto modálních sloves nemá problém. Přesto si ale myslím, že by bývalo vhodné se se všemi žáky na uvedená slovesa zaměřit a porovnat jejich významy například na základě následující úlohy.

Máš čtyři barvy - žlutou, zelenou, červenou a modrou. Geometrické tvary na obrázku vybarvi jednou z těchto uvedených barev tak, aby měl každý jinou barvu a aby byly splněny následující podmínky:

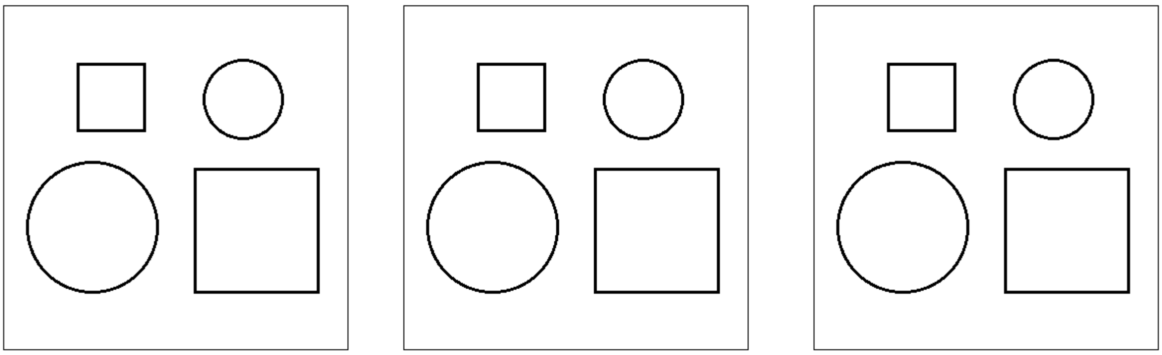
A) Velký kruh musí být vybarvený zeleně.

B) Malý kruh může být vybarvený modře.

C) Velký čtverec nesmí být červený.

D) Žádný malý tvar nemůže být žlutý.

Najdi všechna řešení.



Obrázek 20: Geometrické tvary k vybarvení v úloze na uvědomění si významu modálních sloves

Připravené tři obrázky schválně neodpovídají počtu řešení, aby se jejich počet nestal nápovědou. Úloha má dvě řešení. Pokud žák najde řešení jen jedno, pak je možné, že zcela nerozumí užití slova „může“. Rozhodující je v zadání podmínka B, protože skutečnost, že malý kruh může být vybarven modře, neznamená, že musí být modrý. Vzhledem k ostatním podmínkám zadání může být malý kruh nejen modrý, ale i červený. A to samé platí i o malém čtverci. Velké tvary mají svou barvu jasně danou. Velký kruh je zelený a velký čtverec je žlutý, protože žlutou barvou jeden ze čtyř tvarů musíme vybarvit, ale nemůžeme ji použít na žádný malý tvar.

D5 Sudé číslo lze rozdělit jen na sudé a sudé číslo nebo na liché a liché číslo.

<u>Z písemného záznamu Martiny</u>

D5′ *Když máme rozdělit 20, tak to nejde na sudé a liché, jde to jen na sudé a sudé nebo liché a liché* (2. verze).

Martina hledá další verzi, jak dokázat sudost nuly. Z toho lze usuzovat, že sama tušila, že její první verze nebyla zcela přesná. Tentokrát ale postupuje obráceně, než tomu bylo u D1. Vezme sudé číslo 20 a hledá na jaká čísla lze ve struktuře rozdělovat. I když zmiňuje jen číslo dvacet, zřejmě jsou ale v její hlavě obecně všechna sudá čísla. Martina zjišťuje, že sudá čísla lze rozložit pouze na dvě sudá nebo na dvě lichá čísla. V podstatě se tak nyní na základě rozdělování sudého čísla, dostává opět ke strukturálnímu vztahu, součet sudých čísel je číslo sudé, a nově zmiňuje vztah, součet lichých čísel je číslo sudé.

D6 Rozdíl sudého a sudého čísla nebo lichého a lichého čísel je vždy číslo sudé.

<u>Z písemného záznamu Martiny</u>

D6′ *Když máme 10 a 10, tak je rozdíl 0. Rozdíl je vždy sudý* (2. verze).

Vyslovení výroku D6 je v textu Martiny úzce propojen s výrokem D5. Z toho je možné usuzovat, že i když zmiňuje pouze rozdíl čísel deset a deset, v její hlavě jde o zvažování rozdílu jakýchkoli dvou sudých čísel. O lichých číslech se doslova nezmiňuje vůbec, přesto si myslím, že se dá předpokládat i vzhledem ke zbývající části jejího sdělení, že uvažovala i o rozdílu dvou lichých čísel. Příklad rozdílu čísel deset a deset udává, protože chce, aby výsledek vyšel nula. Do tvrzení D6 tak vkládá myšlenku, že pokud od sebe odečteme dvě stejná čísla, ať sudá nebo lichá, výsledek bude sudý, a proto i nula je sudá.

Bohužel s argumenty Martiny v písemném záznamu nebyli ostatní žáci seznámeni. A jelikož ani sama Martina se k nim ve společné diskuzi nevrací, tvrzení D6 se v záznamu DII neobjevuje a ani není nijak diskutováno.

D7 Liché číslo krát sudé číslo je číslo sudé.

Z diskuze DII

D7′ *Nula je určitě sudá, protože když si dáme třeba tři krát čtyři, tak to nám vyjde dvanáct. A třeba, když si dáme jedna krát nula, tak to máme nula* (Lenka 173, DII).

Lenka o tom sice nemluví, ale v její hlavě se zřejmě alespoň na chvíli objevila myšlenka, že vynásobením lichého čísla se sudým získáme číslo sudé. Ve svém vstupu ale mluví jen o jednom izolovaném modelu, a to $3 \cdot 4 = 12$. Objevený vztah, který zachycuje tvrzení D7, se pak pokouší dále použít pro argumentaci sudosti nuly. Nulu násobí lichou jedničkou a vychází ji opět nula. Již dopředu ale nulu považuje za sudou, a tak má pocit, že vložením nuly do vztahu liché číslo krát sudé číslo je číslo sudé, je argumentace sudosti nuly splněna. Neuvědomuje si však, že kdyby nula byla lichá, splňovala by i jinou strukturální vazbu, liché číslo krát liché číslo dává číslo liché. Z tohoto důvodu Lenčina argumentace není úplná. Pro potvrzení výroku, že nula je skutečně sudá, by bylo potřeba využít i vztah, sudé číslo krát sudé číslo je číslo sudé, tedy 2 krát 0 rovná se 0. Nejen v oboru celých čísel platí, že cokoli násobené nulou, je opět nula. Vynásobíme-li tedy nulu sudým číslem nebo lichým číslem, dostaneme nulu. A proto ze vztahů sudé · liché = sudé a sudé · sudé = sudé vyplývá, že nula je sudá. Kdyby totiž nula byla lichá, pak by po vynásobení se sudým číslem (např. dvojkou) na základě multiplikativní struktury liché · sudé = sudé, mělo vyjít číslo sudé. Došlo by pak k rozporu, kdy nula jako činitel by byla lichá, ale jako součin už by byla sudá.

Z tohoto Lenčina osamoceného vstupu nelze určit, jestli náhodou i tyto myšlenky, nebo alespoň jejich zárodky nebyly ve vědomí Lenky. Bez ohledu na to je však zde klíčová především skutečnost, že se snaží hledat oporu pro sudost nuly v multiplikativní struktuře. Toto hledání je smysluplné, protože se takto sudost nuly dokázat dá. A navíc Lenka poodhaluje první vazbu multiplikativní struktury, o níž ještě nebyla řeč.

Reakce oponentů proti argumentům skupiny D

V diskuzi DI se protiargument k výroku D1 neobjevuje. Příčinnou bude zřejmě jeho silně strukturální povaha, na kterou hlavní oponenti (především Matěj) nedosahují. Strukturální výrok Amálky (229, DI) vrací proto Matěj (235, DI) zpět do sémantiky.

229 Amálka: Pani učitelko, tak jako, když mám, když si sečtu jako třeba šest plus šest, tak mi to dá dvanáct. Takže sudý plus sudý mi dá sudý. A nula plus nula. Kdyby nula byla sudá, tak mi to dá taky sudý, protože nula plus nula se rovná nula.
235 Matěj: Já si myslím, že to jsou. Dovolíš? *(Bere si fix na interaktivní tabuli od Amálky). (Θ)* Jakoby, kdyby byly třeba dva vymyšlený paňáčci, který jakoby nejsou, který neexistujou, tak je nemůžeme rozdělit, protože jako neexistuje, anebo třeba *(Θ)*...

Matěj se nevyjadřuje k tomu, co říkala Amálka, ale namísto toho opakuje své výchozí přesvědčení o nemožnosti rozdělování neexistujících objektů. Spíše tedy, než že by protiargumentoval D1, se vrací k opozici A1.

Ani v dalších vstupech žáků se k výroku D1 nikdo v tu chvíli více nevyjadřuje, a to i přesto, že na něj učitelka zvlášť upozorňuje (232, DI). Diskuze se dále odvíjí v reakcích na Matěje (235, DI). A kdyby nebylo vstupu Lenky (320, DI), zdálo by se, že vstup Amálky v této diskuzi zcela zapadl.

232 Uč.: Slyšeli jste ten názor Amálky?
320 Lenka: Že nula, jak říkala Amálka, když nula plus nula je nula, tak to jde, protože *(Θ)* ta nula musí bejt lichosudá, protože když dáme dvě sudý č, dvě stejný sudý čísla, tak nám to dá sudý, ale zase nulu můžeme roztřetit, a to jedni, a to třeba jedničku ne...

Proti ostatním výrokům skupiny D[56] se ani v DII nikdo další nevyjadřuje.

[56] Proti výrokům D5 a D6 žádné námitky nemohly být zachyceny, protože oba výroky proběhly jen v rámci písemného záznamu jednoho žáka pro učitele. Jejich prezentace pro ostatní ve třídě ve vyučování neproběhla.

4.1.8. Skupina E: Směrová růžice

V diskuzi DII se ukázalo, že i prostředí směrové růžice může dobře posloužit k opoře tvrzení, že nula je sudá. Především tomu napomohlo sledování čísel hromadících se na severu růžice.

E1 Všechna čísla na severu čtyřcípé růžice jsou sudá.

<u>Z diskuze DII</u>

E1′ *Tak teď jsme zjistili, že patří mezi ty sudý* (Marek 109, DII).

Marek z čísel na severu růžice zaměřuje pozornost především na nulu. To, že zde nula stojí mezi samými sudými čísly, považuje za důkaz, že je nula také sudá.

E1″ *Vždyť tamhle jsou všechny sudý* (Ema 114, DII).
Ema sleduje postupné navíjení čísel od nuly kolem růžice tvořené čtyřmi vrcholy (S, V, J, Z) a ukazuje, že u jejího severu stojí pouze čísla sudá.

Reakce oponentů proti argumentům skupiny E

Proti argumentu, že nula je sudá, protože na severu čtyřcípé růžice se hromadí pouze čísla sudá včetně nuly, se ozve nejprve Šimon (121, 138, 142, 147, 151, 154, DII) a posléze i Marek (162, 165, DII).

Šimon zvyšuje počet vrcholů růžice na pět, aby ukázal, že nyní jsou na severu sudá i lichá čísla zároveň. To je impuls pro Marka, aby se vrátil k tvrzení, že nula je sudolichá. Netrvá však dlouho a tento protiargument je oslaben odhalením pravidelnosti v umístění sudých a lichých čísel na severu růžice. Pavel (210, DII) se pokouší ještě upravit růžici na osm vrcholů, ale v tomto případě jsou již opět na severu růžice pouze čísla sudá.

142 Šimon: Zase, kdyby tam bylo, pani učitelko, jako pět těch, jako těch šipek, nebo jak se tomu říká, tak by tam zase byla pětka. Pak by to bylo zase lichý.
151 Šimon: Tady kdyby se třeba tady udělala nějaká ta velká, že jo. Tak kdybysme to počítali, bylo by jich pět, tak tady by byla pětka zase *(ukazuje na sever)*.
154 Šimon: Pak by tam bylo, pani učitelko, deset, pak patnáct, pak dvacet.

162 Marek: Pani učitelko, ale zase Bořek měl pravdu, že to může bejt sudolichý, jak jsem teďkon zjistil podle mých výpočtů. Protože kdybysme šli po pěti, tak to bude nula, pět, deset...
165 Marek No právě, proto to je sudolichý i.
210 Pavel: Že, pani učitelko, kdybysme to počítali od todlenctoho, takhle nula, jedna dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm, devět, deset, jedenáct, dvanáct, třináct, čtrnáct, patnáct, šestnáct.

4.1.9. Skupina F: Neexistence množiny sudolichých čísel

Poslední skupina argumentů žáků pro sudost nuly tvoří opozici k tvrzení, že nula je sudolichá. Jejich protiargumenty se opírají o skutečnost, že žádná množina sudolichých čísel neexistuje, že žádné číslo nemůže být sudé i liché zároveň.

F1 Celá čísla mohou být právě jednou ze dvou variant, buď sudá, nebo lichá.

Z diskuze DI

F1′ *Ale zase čísla musí bejt buď, jenom jedno, buď sudý, nebo lichý* (Lenka 219, DI).

Tímto výrokem není přesně jasné, zda jde přímo o souhlas se sudostí nuly, nebo o pouhé odmítnutí sudolichosti. Přesto jsem ale tento Lenčin výrok zařadila k tvrzení T1, protože vzhledem k dalším časově nejbližším vstupům Lenky se domnívám, že v tuto chvíli Lenka zastávala názor, že nula je sudá.

Z diskuze DII

F1″ *Nene, je jen sudá* (Vojta 127, DII).

Vojta mluví o nule. Podle něj je nula sudá, a to především proto, že odmítá připustit možnost rozšíření tvrzení – nula je sudá – o tvrzení – nula je i lichá.

F2 Množina sudolichých čísel je prázdná.

Z diskuze DII

F2′ *Sudolichá, to nemůže bejt žádný číslo. To neexistuje* (Vojta 122, DII).

Vojta popírá možnost existence skupiny čísel, které by byly zároveň sudé i liché (sudoliché).

F3 Skupina sudolichých čísel existuje, pokud existuje alespoň jeden prvek kromě nuly, který do této skupiny náleží.

Z diskuze DII

F3′ *Ale to by v ní muselo bejt víc čísel než jenom nula* (Ondra 130, DII).

Jak tvrdí Ondra, pokud bychom měli skupinu sudolichých čísel připustit, museli bychom najít ještě nějaké další sudoliché číslo. Příčina, proč očekává nutnost existence dalších sudolichých čísel, je v jeho vnímání matematických pojmů. Aby termín sudoliché číslo označoval podle něj smysluplný matematický pojem, musí pod tento pojem patřit ještě i některá další čísla. To platí nejen o aritmetice, ale o matematice vůbec. Řekne-li se např. čtverec, také nejde jen o jeden objekt (jeden čtverec), ale o celou sérii různých čtverců. Kdyby tedy termín sudoliché číslo měl mít podle Ondry nárok na existenci, pak by kromě nuly musel obsahovat i další čísla. V opačném případě by totiž zavedení označení sudolichý nemělo žádný smysl. Samozřejmě termín nula je smysluplný a stejně tak termíny sudé číslo a liché číslo jsou smysluplné. Z toho, co víme o všech celých číslech, plyne, že nula musí patřit buď k sudým, nebo k lichým číslům. A z růžice vyplývá, že nula patří do sudých čísel.

Z hlediska matematiky ale tvrzení Ondry pravdivé není. Běžně totiž rozlišujeme mezi prvkem x a množinou $\{x\}$. I nula může být singulárním prvkem, a to v tom smyslu, že jde o jediné číslo, kterým nelze dělit. Tuto vlastnost žádné jiné číslo nemá a také neexistuje pojem (různý od „nula“), který by tento jev popisoval. Kdybychom tedy zavedli termín „číslo, kterým dělit nelze“ pak by tento termín obsahoval jediný prvek, a to nulu. Takovéto rozlišování přichází v historii matematiky až na konci 19. století a naprosto neodpovídá úrovni matematického myšlení žáka základní školy. Je tedy evidentní, že takový postup je pro základní školu nevhodný, jak matematicky tak didakticky. Argument Ondry, že termín sudolichý má nárok na existenci pouze tenkrát, když kromě nuly obsahuje ještě nějaké další číslo, je možné proto považovat za opodstatněný.

4.1.10. Přehled argumentace T1

Přehled zachycuje všechny výroky k sudosti nuly (2. sloupec tabulky), které vycházejí ze všech evidovaných argumentů žáků. Tyto výroky jsou roztříděny do skupin (1. sloupec) a doloženy vybranými částmi ze vstupů žáků (3. sloupec). Jejich barevné rozlišení je odkazem na protokol konkrétní diskuze nebo text. Žlutě jsou vyznačeny segmenty vstupů žáků z DI, zeleně z DII a červeně z textu Martiny, který vznikl mezi těmito diskuzemi.

A: ROZDĚLOVÁNÍ A SKLÁDÁNÍ	**A1 Číslo, které lze rozdělit na dvě stejná čísla, je číslo sudé.**	A1′ *Nula je sudá, protože ji můžeme rozdělit na dva kusy* (Lenka 226, DI).
		A1″ Jo, *vždyť to můžeš rozdělit na nula a nula* (Luboš 120, DII).
	A2 Číslo, které lze vytvořit jako součet dvou stejných čísel, je číslo sudé.	A2′ *Kdyby tady byla nula a nula, tak je to taky stejný, takže je to sudý* (Vojta 208, DI).
	A3 Liché číslo na dvě stejné části rozdělit nelze.	A3′ *Lichý číslo se taky dá rozdělit, ale ne na dvě stejný části* (Vojta 032, DI).
		A3″ *Tady mám jedničku, ta je lichá, ta nejde rozdělit. A tady ta mínus jednička, ta taky nejde rozdělit* (Martina 146, DI).

B: RYTMUS	**B1 Sudá a lichá čísla se na číselné ose rytmicky střídají a v tomto rytmu je nula na pozici sudých čísel.**	B1′ *Jak máme od jedničky čísla za sebou, tak je to vždycky sudý, lichý, sudý, lichý. Ale kdyby byly dvě za sebou lichý, tak už by to nebylo jakoby to [střídání]* (Lenka 089, DI).
		B1″ *Od nuly mám nahoru a pak mám ještě dolu* (Martina 132, DI). *Ta nula by měla bejt jako sudá, protože tady mám jedničku, ta je lichá. Pak dvojka, ta je sudá. A tady ta mínus jednička, ta taky nejde rozdělit* (Martina 146, DI). *Takže je to prostě lichý, sudý, lichý, sudý* (Martina 149, DI). *Tak se to střídá. Protože to by bylo trošku divný, kdyby byly, takhle by musely bejt tři vedle sebe stejný* (Martina 154, DI).
		B1‴ *Je to sudý, protože můžu počítat třeba do miliardy, a pořád se mi střídá, sudý, lichý* (Ondra 202, DII).
	B2 Sudá a lichá čísla se v aritmetické posloupnosti čísel s diferencí pět rytmicky střídají a v tomto rytmu je nula na pozici sudých čísel.	B2′ *Takže je ta nula sudá, protože tam se střídá sudá, lichá, sudá, lichá* (Vojta 156, DII).
	B3 Mezi dvěma sousedními lichými čísly musí být číslo sudé.	B3′ *Mínus jedna je lichá. A mezi tím musí bejt nějaký sudý* (Ondra 216, DI).
	B4 Sousedním číslem čísla lichého je číslo sudé a sousedním číslem čísla sudého je číslo liché.	B4′ *Pětka je lichá, a předtím je ta nula sudá* (Ema 166, DII).

C: NULA JAKO ČÍSLICE NA MÍSTĚ JEDNOTEK	**C1 Vícemístná čísla končící nulou jsou sudá.**	C1′ *V desítce je taky nula a je to sudý*. (Marek 036, DI)
		C1″ *Vždycky na konci, když píšeš deset, tak je tam nula, když píšeš dvacet, tak je tam taky nula, a všechno je to sudý* (Vojta 133, DII).
D: ADITIVNÍ A MULTIPLIKATIVNÍ STRUKTURA SUDÝCH A LICHÝCH ČÍSEL	**D1 Sudé číslo plus sudé číslo je opět číslo sudé.**	D1′ *Sudý plus sudý mi dá sudý. Kdyby nula byla sudá, tak mi to dá taky sudý, protože nula plus nula se rovná nula* (Amálka 229, DI).
		D1″ *Když sečteme sudé a sudé číslo, vyjde sudé: S + S = S (2 + 0 = 2). A tím pádem, kdyby byla lichá, tak by to nevyšlo* (1. verze).
		D1‴ *Když sečtem dvě sudý, tak nám vyjde sudá* (Ondra 180, DII).
	D2 Přičteme-li k neznámému číslu číslo sudé a dostaneme číslo sudé, pak je i toto neznámé číslo sudé.	D2′ *Nula je určitě sudá, protože když si přičtem k nule dvojku, což je sudý, tak je to dvojka, a to je taky sudý* (Vojta 177, 179, DII).
	D3 Sudé číslo plus liché číslo je číslo liché.	D3′ *Nula plus jedna je pořád jedna, což vyjde lichý* (Ondra 191, DII).
		D3″ *Když to sečtu s pětkou, nula a pět, tak to je pět, takže sudý a lichý je vždycky lichý číslo* (Vojta 198, DII).

	D4 Liché číslo plus liché číslo je číslo sudé.	D4′ *Lichý a lichý může bejt sudý číslo* (Vojta 207, DII).
	D5 Sudé číslo lze rozdělit jen na sudé a sudé číslo nebo na liché a liché číslo.	D5′ *Když máme rozdělit 20, tak to nejde na sudé a liché, jde to jen na sudé a sudé nebo liché a liché* (2. verze).
	D6 Rozdíl sudého a sudého čísla nebo lichého a lichého čísel je vždy číslo sudé.	D6′ *Když máme 10 a 10, tak je rozdíl 0. Rozdíl je vždy sudý* (2. verze).
	D7 Liché číslo krát sudé číslo je číslo sudé.	D7′ *Nula je určitě sudá, protože, když si dáme třeba tři krát čtyři, tak to nám vyjde dvanáct. A třeba, když si dáme jedna krát nula, tak to máme nula* (Lenka 173, DII).
E: SMĚROVÁ RŮŽICE	**E1 Všechna čísla na severu čtyřcípé růžice jsou sudá.**	E1′ *Tak teď jsme zjistili, že patří mezi ty sudý (Marek 109, DII).*
		E1″ *Vždyť tamhle jsou všechny sudý* (Ema 114, DII).

F: NEEXISTENCE MNOŽINY SUDOLICHÝCH ČÍSEL	**F1 Celá čísla mohou být právě jednou ze dvou variant, buď sudá, nebo lichá.**	F1′ *Ale zase čísla musí bejt buď, jenom jedno, buď sudý, nebo lichý* (Lenka 219, DI).
		F1″ *Nene, je jen sudá* (Vojta 127, DII).
	F2 Množina sudolichých čísel je prázdná.	F2′ *Sudolichá, to nemůže bejt žádný číslo. To (není rozumět) neexistuje* (Vojta 122, DII).
	F3 Skupina sudolichých čísel existuje, pokud existuje alespoň jeden prvek kromě nuly, který do této skupiny náleží.	F3′ *Ale to by v ní muselo bejt víc čísel než jenom nula* (Ondra 130, DII).

4.2. Tvrzení T2: Nula je lichá

4.2.1. Z diskuze DI[57]

Doklady toho, že se někteří žáci alespoň na chvíli v DI přikláněli k názoru, že nula je lichá, přinášejí pouze tyto čtyři vstupy.

007 Několik hlasů: Lichá.
022 Matěj, Šimon (a další hlasy): Lichá.
332 Uč.: Takže, kdo si myslí, že nula je lichá? **333 Uč.: Hm, jeden hlas** *(Hlásí se Šimon).*

Argumentační podpora výroku T2 však nebyla zachycena. Příčinou je, že vstupy žáků přiklánějících se k T2 zaznívají víceméně z davu a jsou myšleny spíše jako opozice k výroku, že nula je sudá. Tvrzení T2 tedy představuje spíše odmítnutí sudosti. Přesnějším výkladem slova lichá by proto bylo, není sudá. Z tohoto hlediska je tedy tvrzení „není to sudý“, které se objevuje ve vstupu Emy a Lenky (027), přesnější než tvrzení „ je lichá“ (022, 027)

Výrok „nula je lichá“ zaznívá na základě předpokladu, že každé číslo je buď sudé, nebo liché. Z dob svých studií na gymnáziu si pamatuji, že tento předpoklad (co není sudé, je liché) byl častým zdrojem chyb v teorii funkcí při určování sudosti nebo lichosti funkce. Funkce, jejíž graf je souměrný podle osy y (např. parabola funkce $y = x^2$), je sudá. Funkce, jejíž graf je souměrný podle počátku (např. přímka $y = x$), je lichá. Častým omylem bylo, že po zjištění, že funkce není sudá, student automaticky napsal, že je lichá. Přitom funkce nemusí být ani lichá, ani sudá. A stejné je to i u čísel. U celých čísel sice platí, že jsou buď sudá, nebo lichá, ale už u racionálních čísel tomu tak není. Např. tedy zlomek ½ není sudý ani lichý. Z výroku, že není sudý, proto automaticky neplyne, že je lichý.

I když se lichost nuly v protokolu objevuje ve vstupech žáků jen velmi zřídka, zřejmě v jejich hlavách zůstává tato myšlenka po celou dobu diskuze. To se projeví v okamžiku, kdy se objeví výrok o sudolichosti (lichosudosti) nuly jako protiargumentu k možnosti, že by nulu nešlo zařadit ani k sudým, ani k lichým číslům.

[57] V protokolu DII argumenty pro T2 nebyly zachyceny.

4.3. Tvrzení T3: Nula není sudá ani lichá

4.3.1. Z diskuze DI[58]

Zastáncem tvrzení T3 byl především Matěj, jak ukazují např. jeho vstupy 112 a 115, a dále pak Andrea a Šimon.

112 Matěj: Ne, pani učitelko, to není ani jedno, protože nula je prostě NIC.
114 Uč.: Takže ty si myslíš, že nula není ani lichý ani sudý. 115 Matěj: Ne, to je prostě NIC[59].

Tvrzení, že nula není sudá ani lichá, vzniklo na základě nesouhlasu se snahou rozdělovat nulu na stejné části, nebo ji naopak skládat ze stejných částí. Argumenty zastánců T3 se výrazně opírají o manipulativní činnosti a představu toho, že neuchopitelné NIC jako neexistující objekt nelze dále dělit (např. 020, 030, 060, 109).

Nula je tedy NIC a s ním se nedá nijak zacházet. Přičemž argumentační oporou se stává například představa prázdné láhve, kterou nelze dále rozlévat (Šimon, 101). NIC tedy není možné dělit. A i kdyby to bylo možné, co by tímto dělením vzniklo? Další NIC? To by pak ale znamenalo, že rozdělením něčeho, dostanu to samé (Matěj, 165). Avšak to je ze sémantického hlediska nesmysl, jak ukazuje i například argument týkající se papíru, který když rozstřihnu, nikdy již přeci nebude mít původní velikost (Andrea, 259).

Těmto vstupům se podrobně věnuje část 5.1..

[58] V protokolu DII argumenty pro T3 nebyly zachyceny.
[59] O užívání označení NIC blíže na str. 150.

4.4. Tvrzení T4: Nula je sudá i lichá (sudolichá / lichosudá)

4.4.1. Z diskuze DI

Toto čtvrté a poslední možné tvrzení, které je o nule z kombinačního hlediska možné říci, je pravděpodobně výsledkem snahy odstranit ke konci DI sociální pnutí, k němuž důsledkem diskuze došlo. Záměrem jeho zastánců[60] je tak především vyřešit spor ve prospěch všech. Jde tedy spíše o nalezení sociálně kompromisního řešení problému, zda nulu zařadit mezi sudá nebo lichá čísla než o výsledek kognitivního procesu. A tak je v tomto výroku velice pěkně patrné, jak kognitivní prvky poznávání jdou ruku v ruce s prvky sociálními, emotivními. Snaha najít tuto sociální shodu zřejmě zapříčinila, že se k tomuto tvrzení v závěru diskuze přidalo nejvíce žáků. A to i přesto, že jeho autorem byl zřejmě nejslabší žák třídy (Pavel, 212).

Někteří žáci se ale také pokoušeli hledat kognitivní oporu tohoto tvrzení. Argumenty, kterými se však snažili podepřít toto tvrzení, postavili na základě chybné asociace, kdy nula napsaná jako součet dvou nul představovala nulu sudou a nula napsaná jako součet tří nul nulu lichou. Podle Lenky (243, 275, 320, 321) tak jde sudá čísla půlit, ale lichá třetit.

Dále v této myšlence pokračuje Pavel (především vstupy 266 a 269), který ji prodlužuje na strukturu. Začne uvažovat o posloupnosti rozkladů nuly na dvě nuly (0 = 0 + 0), tři nuly (0 = 0 + 0 + 0), čtyři nula (0 = 0 + 0 + 0 +0) atd. až do nekonečna. Kdyby se nula dala rozdělit jen na dvě nuly, tak je jasně sudá. Jenže ona se dá rozdělit i na tři nuly a v tomto případě je podle něj nula lichá. Další rozklad na čtyři nuly je ale opět sudý. Sudost a lichost nuly je tedy dána počtem nul, na které se dá rozdělit, a proto je sudolichá.

Pavel ke správnému argumentu, že nula sudá, protože jde rozdělit na dvě stejné části (nuly), přidává myšlenku, která je chybná. Liché číslo není to, co se dá rozdělit na tři stejné části. Z hlediska sudosti a lichosti čísla je jeho argument tedy špatný, avšak to, že uvažuje v nekonečné posloupnosti přirozených čísel, je velice cenné. Pavel zřejmě již z některých svých předchozích zkušeností ví, že struktura mu pomůže najít odpověď a zároveň cítí, že vložením problému do struktury může zvýšit důvěryhodnost výsledku. Skutečnost, že jeho základní předpoklad je vadný, zde tedy

[60] Přehled vstupů z DI zastávajících T4 je zařazen až na konec tohoto textu, kde je doplněn o další informace či analýzu.

není ani tak podstatná jako jeho metakognitivní zkušenost s vkládáním problému do struktury pro nalezení řešení.

Pojem sudolichá (lichosudá) je nový tvar, který žáci vytvářejí spojením tvrzení, že nula je sudá a nula je lichá, a současně i odstraňuje rozpor mezi těmito tvrzeními. Vzhledem k tomu, že jde o nový tvar, nemohou se opřít o nějakou zkušenost s jeho používáním. Jak je tomu například u zavedené konvence popisování světových stran, kdy říkáme severovýchod, a ne východosever. Zde ale tento novotvar není spojen s žádným jazykovým územ, a tak se v průběhu diskuze objeví obě dvě varianty pořadí slov složeniny, tedy tvar sudolichá i lichosudá, aniž by tomu někdo věnoval pozornost.

Obvykle bývá zvykem, že u slov vzniklých spojením jiných slov se na první místo dává důležitější slovo. V diskuzi žáci nejprve používají spojení sudolichá. Tento tvar se poprvé objevuje u Bořka (152), ale jen v pozadí záznamu s výrazně nejistou intonací. Po druhé je pak zaznamenán u Pavla (212), který s novotvarem přichází i před třídu. Těžko se dá určit, kdo z chlapců je autorem tohoto spojení slov na základě tvrzení, že nula je obojí, jak sudá, tak lichá. Vzhledem k tomu ale, že oba sedí v lavicích blízko u sebe, předpokládám, že k němu dospěli v rámci individuální diskuze, jak naznačují i vstupy v protokolu. K jejich dílčí diskuzi se připojil i Marek (214), který sedí také blízko nich a navíc všichni tři jsou výborní kamarádi.

Zprvu zaznívá spojení sudolichá, a to pravděpodobně proto, že oba chlapci, Bořek (152) i Pavel (212), reagují na předchozí argumentace, které se týkají především obhajoby sudosti. Ve vstupu 272 pak ale Bořek náhle spojení obrací a použije tvar lichosudá. Vzhledem k tomu, že Bořek sám nemá rozsáhlejší vstupy, nedá se přesně určit příčina této změny. Ale možná byl ovlivněn tím, že ode mě chvíli před tím slyšel dotaz (270) týkající se lichosti nuly. Každopádně od tohoto okamžiku (od vstupu 272) se v protokolu objevuje pouze spojení lichosudá, a to nejen od žáků, ale i ode mě, když diskuzi shrnuji.

V navazující diskuzi (DII) pak ale opět od Bořka zaznívá spojení sudolichá. Spojení lichosudá se již neobjevuje. Zde si již ale myslím, že pořadí spojení slov získává svůj význam, protože argumenty pro sudost jsou pro žáky již tak pádné, že Bořek s názorem o zařaditelnosti nuly k sudým i lichým číslům zůstává v podstatě sám. Zřejmě tedy už cítí, že nula bude skutečně jen sudá, ale nechce se složeniny hned tak vzdát, protože se cítí být jejím autorem a v předchozí diskuzi měla úspěch. Proto používá právě spojení sudolichá, v níž sudost alespoň upřednostní.

Výběr argumentů z DI zastávajících tvrzení T4.

Slova sudolichá / lichosudá jsou pro přehlednost tučně zvýrazněná.

<table>
<tr><td>152 Bořek: Sudolichá.
(Intonačně nejisté, slyšet jen v pozadí.)</td><td></td></tr>
<tr><td>212 Pavel: Pani učitelko, je to asi blbost, ale já si myslim, že nula je sudolichá, protože...</td><td>Pavel jako první vstupuje před třídu s termínem sudolichá. Odhaduji proto, že je zřejmě i autorem této myšlenky.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ještě před tímto vstupem došlo ale pravděpodobně nejprve k prodiskutování názoru v malé skupince jeho nejblíže sedících spolužáků. Proto je i možná pojem sudolichá protokolem zachycen už u Bořka (152). Spolužáci kolem Pavla s jeho návrhem souhlasili, a tak jej přináší i před ostatní spolužáky.
Slovy „je to asi blbost“ Pavel obvykle začíná, když chce do diskuze přinést něco, co ještě vůbec nezaznělo. Asi se tak snaží dopředu hájit, kdyby se náhodou ukázalo, že to, co řekne, bude nesmysl. Pavel je velmi slabý žák a svého častého chybování si je velmi dobře vědom. Proto upozorněním, že možná teď řekne hloupost, může v případě nepřijetí argumentu, dodat, že si to také myslí a že to říkal. To, čeho si ale v každém vstupu Pavla vážím, je jeho snaha najít také něco, čím by mohl k řešení problému přispět.</td></tr>
<tr><td>213 Bořek: Pani učitelko, já si to myslím taky.</td><td>Souhlasí s Pavlem (212) a zároveň upozorňuje učitelku i třídu, že se s Pavlem na formulaci tvrzení T4 podílel.</td></tr>
<tr><td>214 Marek: Jo.</td><td>Třetí spolužák a kamarád, který sedí poblíž Pavla a Bořka. V této skupince zřejmě došlo k prvotnímu prodiskutování T4.</td></tr>
<tr><td>215 Pavel: Protože to se dá rozdělit, to máš dva, to máš nula a nula, takže k tomu přidáš ještě nulu...</td><td>Vychází z rozkladu nuly na dvě nuly, tedy 0 = 0 + 0. K tomuto rozkladu je možné přidat ještě jednu nulu a pak půjde o rozklad 0 = 0 + 0 + 0.</td></tr>
<tr><td>227 Bořek: Takže je sudolichá.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>243 Lenka: Takže je to sudý i lichý číslo, protože nula můžeš rozdělit i na třetiny.</td><td>V hlavě dívky se rodí falešné intuitivní poznání, že číslo rozdělitelné na dvě stejná čísla je sudé a číslo rozdělitelné na tři stejná čísla je liché.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Jev nese typické rysy falešného intuitivního poznání:
- objeví se náhle spíše z asociace než z izolovaných modelů.
- použije metaforu, které přiřkne sílu izomorfizmu. (Zde se jedná o pravdivou asociaci „dvě-sudé, tři-liché“ a nepravdivou metaforu „sudé číslo je možné rozpůlit a liché roztřetit“.)
- nové „poznání“ není ověřováno. (Přitom stačilo vzít číslo 6.) A stejně tak nedochází k propojení „poznání“ s dalšími znalostmi. (Jak je to s číslem, které lze rozdělit na 4 stejné části nebo na 5 stejných částí.)</td></tr>
<tr><td>244 Andrea: Takže je to oboje.</td><td>Andrea na okamžik opouští tvrzení T3 a přidává se k T4.</td></tr>
<tr><td>266 Pavel: Jo. Že nul je nekonečno, takže vlastně to jde popořadě. Jedna nula, dvě nuly, tři nuly, čtyři nuly, a to jsou jako čísla. Takže nula jedna je lichá a potom dvojka je sudá, takže (odmlčí se).</td><td>Vkládá myšlenku Lenky (243) do struktury. Nula jde rozdělit na dvě nuly, tři, čtyři až nekonečno nul. Přičemž rozkladů na sudý počet nul je nekonečno a stejně tak i lichých rozkladů je nekonečno. Ve struktuře tedy sudolichost představuje posloupnost sudých a lichých rozkladů. Pokračování i v 269.</td></tr>
<tr><td>269 Pavel: Já vim, ale když je třeba, vezme se to, máme jednu nulu, potom máme dvě nuly, potom máme tři nuly, takže jednička je lichá, dvojka je sudá a trojka je taky lichá.</td><td></td></tr>
<tr><td>272 Bořek: Nula je lichosudá.</td><td>Změna pojmu sudolichá na lichosudá.</td></tr>
<tr><td>273 Pavel: No, já si taky myslim, že je lichosudá.</td><td></td></tr>
</table>

275 Lenka: Musí být, podle mě je **lichosudá**, protože nulu si můžeme rozdělit a můžeme ji rozdělit i na třetiny i na poloviny a jakoby *(Θ)* to *(ΘΘ)*.	Lichosudost vyplývá z možnosti rozdělovat nulu na poloviny, ale i na třetiny.
320 Lenka: Že nula, jak říkala Amálka, když nula plus nula je nula, tak to jde, protože *(Θ)* ta nula musí bejt **lichosudá**, protože když dáme dvě sudý č, dvě stejný sudý čísla, tak nám to dá sudý, ale zase nulu můžeme roztřetit, a to jedni, a to třeba jedničku ne...	Termín lichosudá nepopírá, že by nula byla sudá. Strukturální vztah, že dvě stejná sudá čísla dají číslo sudé, platí. Okolnost, že je ale nulu možné rozdělit na tři nuly, rozšiřuje tvrzení, že nula je sudá, ještě o tvrzení, že nula je i lichá.
321 Lenka: Ale trojku už zase můžeme roztřetit.	

4.4.2. Z diskuze DII

V diskuzi DII[61] má tvrzení T4 už jen pár zastánců. V předchozí diskuzi DI bylo tvrzení T4 jakýmsi kompromisem mezi T1 (nula je sudá) a T2 (nula je lichá). V okamžiku, kdy se ale T4 objevuje v DII, dostává se do opozice proti T1. Odmítnutí sudosti nuly je výrazně patrné u Bořka (113), který T1 protiargumentuje právě tím, že nula je sudolichá (115). V běhu diskuze se pak T4 z této opozice posouvá spíše do kompromisní roviny, kdy zastánci T4 jsou v jistých kontextech ochotni sudost nuly připustit (patrné především z Bořek 126, Marek 165).

Bořkovo opoziční tvrzení (113) má především sociální charakter, protože on sám se cítí být autorem pojmu sudolichá, a tak chce zajistit jeho zachování. Navíc si též vybavuje, že když se minule na konci hodiny o nule hlasovalo, sudolichost nuly byl vítězný názor.

Bořek (126) však zároveň i cítí, že argument Marka (109), který poukazuje na nulu stojící na severu růžice mezi samými sudými čísly, jen stěží nějak vyvrátí. Současně je i sociálně citlivý na hlasy třídy. Vidí, že většina třídy stojí proti němu. K situacím, kdy by se svým názorem šel proti třídě, došlo v minulosti jen minimálně a většinou se jim snažil rychle vyhnout. Argument Marka i tlak třídy, který se vytvoří, ho proto přimějí ustoupit od svého původního kategorického tvrzení (v 113, 115). Během 34 sekund tak Bořek mění své původní stanovisko a namísto něj připouští (126), že v jistém kontextu může být nula sudá, ale například minule byla sudolichá. Bořek tedy říká, že zda je nula sudá nebo sudolichá, může záviset na kontextu, jak to i zná ze své zkušenosti. Často jde o takové situace, kde se používá konvence[62]. Někteří žáci, a zřejmě jich je většina, se však domnívají, že sudost nuly je věc matematické pravdy a nikoli konvence. Dvojí interpretaci podle nich tedy připustit nelze (127, 128, 129).

Oporu tvrzení, že nula je sudolichá hledá také Šimon (142, 147, 151) tím, že přikresluje růžici další vrchol. U této upravené růžice na pět vrcholů následuje za nulou na severu pětka. Pětka je lichá a už tedy neplatí, že nula stojí mezi samými sudými čísly (Šimon, 154). Na severu tak vedle sebe stojí sudá i lichá čísla, a tak se na chvíli zdá, že došlo k objevení skupiny sudolichých čísel. Tuto mylnou

[61] Přehled vstupů z DII zastávajících T4 je zařazen až na konec tohoto textu, kde je doplněn o další informace či analýzu.

[62] Otázkou konvence je například, pokud stovková tabulka (10 x 10 polí) bude začínat 0, pak číslo 10 bude patřit do druhé desítky. Pokud však bude začínat 1, bude číslo 10 v první desítce. Podobně je i věcí konvence zařazení nuly mezi přirozená čísla, či ne (Hejný, 2014).

domněnku však téměř vzápětí vyvrací Vojta (153,156), když v této skupině sudých a lichých čísel objeví rytmus.

Další pokus o modifikaci směrové růžice, tentokrát až na osm vrcholů, provádí ještě i Pavel (210). Ukazuje se však, že také tato úprava poslouží jen jako další důkaz sudosti nuly. V případě osmi vrcholů se totiž na severu růžice začnou objevovat opět jen čísla sudá, včetně tedy nuly.

Výběr argumentů z DII zastávajících tvrzení T4.

113 Bořek: Ne. *Jako jediný se ozývá proti souhlasnému pokyvování třídy na vstup Marka (109): Pani učitelko, jak jsme se jednou, furt si říkali, jestli je nula lichá nebo sudá, tak teď jsme zjistili, že patří mezi ty sudý.*	Nechce se vzdát myšlenky sudolichosti, což svědčí i o jeho osobnostní autonomii. Má nějaký názor, vystoupí s ním před třídu a snaží se ho hájit.
115 Bořek: Je sudolichá.	
121 Šimon: Kdyby tam bylo pět těch, těch, těch ... *Myslí pět šipek ve směrové růžici namísto nynějších čtyř (viz dále 142, 147, 151, 154).*	
123 Bořek: Je. *Reakce na Vojtu (122)*: *Sudolichá, to nemůže bejt žádný číslo. To (není rozumět) neexistuje.*	Nesouhlasí s tím, že by nemohlo existovat sudoliché číslo.
126 Bořek: Ale že teďkon, pani učitelko, patří jakoby do tadytý, ale jinak je obojí.	Upouští od svého kategorického tvrzení a snaží se najít kompromis. V situaci, která je nyní řešena je možná nula sudá, ale v jiné je sudolichá.

137 Bořek: Ale nula je úplně jiný číslo, chápeš? *Reakce na Ondru (130): Ale to by v ní muselo bejt víc čísel než jenom nula.*	Bořek upozorňuje, že s nulou se nedá zacházet stejně jako s ostatními čísly, nula je něco zvláštního a vyžaduje tedy jiný přístup.
142 Šimon: Zase, kdyby tam bylo, pani učitelko, jako pět těch, jako těch šipek, nebo jak se tomu říká, tak by tam zase byla pětka. Pak by to bylo zase lichý. *Klára (072): Kdyby tady bylo ještě ten severovýchod, tady ten jihovýchod a tak dále, tak by to nebylo po čtyřech. To by bylo potom po osmi.* *Ondra (130): Ale to by v ní muselo bejt víc čísel než jenom nula.*	S myšlenkou upravit růžici na pět vrcholů přichází Šimon zřejmě v návaznosti na modifikaci růžice Kláry (072) a na vstup Ondry (130), který tvrdí, že předpokladem existence skupiny sudolichých čísel je nalezení ještě dalších čísel patřících do této skupiny. Šimon chce ale ukázat (dále i 147, 151), že kdyby růžice byla pěticípá, už by nula nestála mezi samými sudými čísly, ale i lichými. A tak Šimon v podstatě znovu otvírá prostor pro Bořkovu sudolichou nulu.
147 Šimon: Jako, že kdyby to bylo jako, kdyby se ještě přidělala jako ještě ta jedna, ta jako (*odmlčí se).*	
151 Šimon: Tady kdyby se třeba tady udělala nějaká ta velká, že jo. *(Přikresluje k růžici další vrchol ve směru na severovýchod.)* Tak kdybysme to počítali, bylo by jich pět, tak tady by byla pětka zase *(ukazuje na sever)*.	

154 Šimon: Pak by tam bylo, pani učitelko, deset, pak patnáct, pak dvacet. *Nic nepíše, vše zatím běží jen v hlavách dětí.* *Vojta(153): Ale pak by se to střídalo, pak by tam byla zase sudá.*	Šimon rytmické střídání sudých a lichých čísel v aritmetické posloupnosti s diferencí 5 zatím nevidí, i když na něj Vojta (153) již upozornil. Šimon sleduje jen to, že se na severu začala kromě sudých čísel objevovat i lichá.
162 Marek: Pani učitelko, ale zase Bořek měl pravdu, že to může bejt sudolichý, jak jsem teďkon zjistil podle mých výpočtů. Protože kdybysme šli po pěti, tak to bude nula, pět, deset... (*stranou na tabuli zapisuje tato čísla.)*	Marek se v předchozí diskuzi přiklonil k názoru, že nula je sudolichá, především z důvodu kamarádství s Bořkem. I nyní cítí, že jeho kamarád zůstal v diskuzi sám, a tak využije příležitosti, aby se ho zastal. V předchozích vstupech slyšel, že v případě růžice s pěti vrcholy budou u severu sudá i lichá čísla. Rytmus si zatím neuvědomuje, a tak souhlasí se sudolichostí nuly (i vstup 165).
165 Marek: No právě, proto to je sudolichý i. *Reakce na Tadeáše (163): A co je deset? To je sudý.*	V hlásce „i“, kterou vyslovil nezvykle na konci věty je patrné zaváhání. Zřejmě názor, že nula je sudá, zcela neopustil, ale teď ho upoutala i možnost sudolichosti.
168 Bořek: Obojí. *Reakce na Marka (167): Hm. Je to podle mě takový, no... (váhá o zařazení nuly).*	

<table>
<tr><td>210 Pavel: Že, pani učitelko, kdybysme to počítali od todlenctoho, (ukazuje na sever, jde prstem kolem růžice a čísla přiřazuje i k malým vrcholům na SV, JV, JZ a SZ) takhle nula, jedna dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm, devět, deset, jedenáct, dvanáct, třináct, čtrnáct, patnáct, šestnáct.</td><td>Pavel je velice slabý žák, který ale pochopil myšlenku, že přirozená čísla může navíjet na kružnici, což je základ modulárních aritmetik. Čísla na severu 0, 8 a 16 ve vyjmenovávání čísel kolem růžice zdůrazňuje, čímž ukazuje, že získal</td></tr>
<tr><td colspan="2">již nějakou zkušenost s vizualizací zbytkových tříd. V tomto vstupu Pavla však velký význam hraje především skutečnost, že do diskuze vstupuje i slabý žák. Jeho sebevědomí tedy není úplně nízké. Pavel do diskuze dokonce vstupuje se svou vlastní myšlenkou, rozšiřuje růžici až na osm vrcholů. Tato myšlenka sice vychází z osvojení toho, co se ve třídě odehrálo, nebo si možná vzpomněl i na vstup Kláry (072), ale jemu se líbí, jak to chození dokolečka umožňuje jít vlastně až do nekonečna. Je to stejné, jako když jsou děti předškolního nebo mladšího školního věku fascinované velkými čísly a píší např. 112, 113, 114 atd., protože se jim líbí, jak to jde pořád dál a dál. Pavla upoutalo, jak se posloupnost čísel dá navíjet na růžici, aniž by se uteklo z ohraničeného prostoru, což by se stalo například na číselné ose. Lze tedy těžko přesně určit, zda Pavlův záměr skutečně bylo zkusit najít jiný argument pro sudolichost nuly, nebo se chtěl jen podělit o radost z umisťování čísel kolem hodně rozvětvené, a nyní i symetricky, růžice. Nicméně i tento pokus opět vedl jen k potvrzení sudosti nuly.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Porovnání modifikací růžice Šimona a Pavla
Oba, Šimon i Pavel, svými modifikacemi růžice vstoupili do argumentace o problému sudosti nuly, avšak jejich způsoby provedení těchto modifikací se liší. Pavel u Šimona vidí, že růžice nemusí mít jen čtyři vrcholy, ale že jich tam může být i více, například pět. Všimne si také, že pěti vrcholů u růžice Šimon dosáhl protažením jednoho z kratších vrcholů růžice. Růžice o pěti vrcholech na Pavla působí nepěkně, protože postrádá symetrický řád. Protáhne tedy ještě i zbylé menší vrcholy a dostává tak růžici o osmi vrcholech. Pavel má tak ze svého pohledu pravděpodobně pocit, že vylepšuje Šimonovu úpravu růžice. Pavel vychází z obrázku, který ale pro Šimona v té chvíli není důležitý. Šimon ukazuje, že je schopen u tohoto problému myslet abstraktně, že je schopen izolovaný model modifikovat ze čtyř vrcholů, na pět, šest atd. Pavel však podléhá spíše vizuálnímu dojmu.</td></tr>
</table>

4.5. Fluktuace názorů žáků i třídy při řešení otázky, zda je nula sudá

Předchozí části se postupně věnují tvrzením T1 – T4 u jednotlivých žáků. Pomocí protokolů diskuzí DI a DII je však možné evidovat také posuny mezi těmito tvrzeními, a to jak u jednotlivých žáků, tak v rámci celé třídy. I když tyto dva pohledy není možné zcela oddělit, na porovnání proměny názorů třídy mezi DI a DII se více soustředí část 4.5.1.. Část 4.5.2. je poté věnována sledování změn názorů u jednotlivých žáků.

Ke změnám názorů žáků, ale i třídy docházelo jak v průběhu diskuzí (především v DI), tak zejména mezi koncem DI a vstupem do DII. Přičemž tyto změny se týkaly nejen posunů od jednoho tvrzení[63] k jinému (např. z T1 na T4), ale i síly přesvědčení pro určitý typ názoru (například tedy v rámci T1). Zde se však zaměřím pouze na fluktuaci názorů mezi jednotlivými tvrzeními T1 – T4.

4.5.1. Proměna názoru třídy

I když se zpočátku DI zdálo, že se většina třídy přiklání spíše k tvrzení, že nula je sudá (T1), protiargumenty několika žáků nakonec rozmělnily názor třídy do čtyř tvrzení. Stav na konci hodiny ukazuje následující tabulka (tab. 8), která vychází ze závěrečného hlasování žáků, k jakému tvrzení se kdo přiklání.

Tvrzení	Počet zastánců	Zastánci jmenovitě
T1 Nula je sudá	**5**	*Martina, Vojta, Nela, Amálka, Ondra.*
T2 Nula je lichá	**1**	*Šimon*
T3 Nula není sudá ani lichá	**2**	*Matěj, Andrea*
T4 Nula je sudá i lichá (sudolichá /lichosudá)	**7**	*Pavel, Bořek, Lenka, Ema, Petr, Luboš, Marek*

Tabulka 8:Počty zastánců pro T1 – T4 při ukončení diskuze DI

[63] Označení tvrzení odpovídá označením používaných v kapitole 4.

Na konci DI je tedy v rámci třídy převažujícím tvrzením T4 spolu s T1, zatímco T2 a T3 se týkají spíše jen jedinců.

K velkému posunu pak dochází především v době mezi DI a DII, protože již na začátku DII je patrné zcela jiné rozložení názoru třídy než na konci DI. Tvrzení T2 a T3 v DII již v podstatě nejsou evidována a většina žáků, kteří se k problému nuly vyjadřují, mluví nyní ve prospěch T1. Již na začátku DII tedy dochází k přesunu dominantního názoru třídy z T4 na T1. T4 už vlastně drží jen jedinec (Bořek). V DII je tak ve třídě patrná i proměna vnitřního přesvědčení žáků. V DI zaznívaly z úst žáků různé pochybnosti, ale v DII je již většina třídy o sudosti nuly pevně přesvědčena. Náchylnost přijmout alternativní názor je proto již výrazně nižší.

Uvedená skutečnost je charakteristická pro metodu VOBS. U tradičního vyučování spoléhajícího na paměť žáka je běžné při návratu k učivu opakování hlavních myšlenek, zde ale dochází k postupnému zrání myšlenek. Takže při návratu k původnímu tématu u mnoha žáků je názor žáků hlubší a propracovanější.

Po dvou diskuzích a době přibližně jednoho měsíce žáci nakonec dospívají ke správné odpovědi, že nula je sudá. To sice i zprvu tušili, ale nyní díky diskuzím mají již toto tvrzení podepřeno i mnoha argumenty. Jak je tedy vidět, formování představ nemusí jít vždy hned zpočátku tou nejkratší cestou. Naopak může nejprve dojít i k přijetí chybného nebo nepřesného řešení třídou (konec DI). Avšak po čase se třídě přesto podaří k cíli dobrat (viz DII).

4.5.2. Proměna názorů u jednotlivých žáků

Při mapování názorových hledisek žáků vycházím z argumentů žáků zachycených v protokolech DI a DII a jejich analýz. Z toho důvodu není možné vysledovat kompletní proměnlivost názorových hledisek u všech žáků. Je pravděpodobné, že řada změn proběhla mimo záznam v rámci skupinových diskuzí nebo jen v hlavách jednotlivých žáků. Přesto se ale domnívám, že zachycené verbální projevy poskytují věrný obraz o tom, jak třídní diskuze a následné individuální promýšlení problému ovlivňuje formování představ žáků.

Přehled zachycených proměn v příklonech k jednotlivým tvrzením T1 - T4 u jednotlivých žáků jsem zachytila do tabulky (viz tab. 9, str. 134). U každého konkrétního žáka jsem hledala, jaké tvrzení zastával na začátku DI, zda v něm došlo k nějaké změně a jaké bylo i výstupní tvrzení po ukončení DI. Stejně jsem pak postupovala u DII. Sloupec pro výstupní tvrzení z DII jsem ale zvlášť nezaváděla, protože na konci druhé diskuze proti přijetí sudosti nuly již nepadla žádná námitka. Předpokládám tedy, že v tomto sloupci u každého přítomného žáka stojí T1. Některá tvrzení zapsaná u žaků jsou uvedená v závorce, čímž chci více zdůraznit, že souhlas s daným tvrzením žáka je pouze můj předpoklad na základě vzpomínek z hodin a znalosti žáka, protokolem však tuto svou domněnku nemohu doložit.

Ze zachycených vstupů žáků lze jen těžko určit přesně okamžik, kdy u žáka ke změně mezi tvrzeními došlo. U zaznamenaných posunů od jednoho tvrzení ke druhému jsem tedy alespoň uvedla (pokud to bylo možné) číslem vstup žáka, kde je možné tuto změnu poprvé doložit v protokolu. Například tedy označení „T1 (229)" ukazuje, že ve vstupu 229 je u daného žáka možné poprvé najít doklad tvrzení T1.

U některých žáků však na základě protokolů diskuzí stejně nebylo možné určit žádné stanovisko. Jde o Andreu, Kláru, Amálku a Martinu v DII, u nichž v protokolu DII nebyly zachyceny žádné jejich vstupy vyjadřující se k problému sudosti nuly. U Ondry (DI), Pavla (DII) a Šimona (DII) vstupy sice lze najít, ale přesto z nich není možné s jistotou určit zastávaná tvrzení. Velké tiskací písmeno N v tabulce u Kláry (DI), Matěje (DII) a Petra (DII) značí, že tito žáci v diskuzi nebyli přítomni.

Jméno	DI		DII
	začátek a průběh	Konec	začátek a průběh
Amálka	T1 (229)	T1	-
Andrea	T3 (130) → T4(244) → T3 (309)	T3	-
Bořek	T4 (152)	T4	T4 (115) → T1 (211)
Ema	(T1) → (T4) (335)	T4	T1 (114)
Klára	-	N	-
Lenka	T1 (089) → T4 (243)	T4	T1 (118)
Luboš	(T1/T2/T4)	T4	T1 (120)
Marek	T1 (006) → T3 (119) → T1 (142) → T4 (214)	T4	T1 (109) → T4 (162) → T1 (171)
Martina	T1 (146)	T1	-
Matěj	T2 (022) → T3 (112)	T3	N
Nela	T1	T1	T1
Ondra	T1(005) → T3 (123) → T1 (134)	T1	T1 (111)
Pavel	T4 (212)	T4	(T1)
Petr	T4 (222)	T4	N
Šimon	T2 (022) → (T3)	T2	-
Vojta	T1 (034)→ T3 (121) → T1 (135)	T1	T1 (116)

Tabulka 9: Proměna souhlasu s T1 - T4 u jednotlivých žáků v DI a DII

Doplňující komentáře k některým žákům o údajích zaznamenaných v tabulce

Andrea

DI:

U Andreji do vstupu 130 není zcela jasné, jestli přímo zastává tvrzení T3 nebo spíše popírá jiné uchopení nuly než pouze sémantické.

DII:

V DII Andrea bohužel nedostala slovo, ač se o něj hlásila. Předpokládám ale, i vzhledem k nepřítomnosti Matěje, že by se nyní Andrea přiklonila k většinovému názoru o sudosti nuly. Pádný by přitom pro ni byl především argument rytmu sudých a lichých čísel na číselné ose, a to z toho důvodu, že ho pěkně a jednoduše vysvětluje Ondra (202), do kterého je zamilovaná. Avšak také je i možné, že by se znovu pustila do tvrdé obhajoby T3 sama proti celé třídě. Již se to dříve několikrát stalo. Bylo to však v době, kdy mezi ní a mnohými dalšími spolužačkami a spolužáky panovaly spory. Dávání protiargumentů pak ani tolik nesouviselo s kognicí jako spíše s ukázáním vzdoru a distancováním se od těch, s nimiž měla sociální spory. V této době jsem ale žádné takové napětí mezi žáky nezaznamenala, a proto možnost, že by šla proti třídě, příliš nepředpokládám.

Šimon

DI:

Po celou dobu diskuze nelze s jistotou říci, které tvrzení Šimon zastává. Na počátku diskuze (022) se hlásí k lichosti nuly. Jde však zřejmě jen o projevený nesouhlas s její sudostí na základě předpokladu, že pokud číslo není sudé, tak je liché. V průběhu diskuze se na základě analýz po celou dobu zdá, že souhlasí s tvrzením T3. Vstup, kterým by se přímo vyjadřoval k tomuto tvrzení, ale nenajdeme. Vždy jde spíše o projevení nesouhlasu s tím, že by s nulou šlo jakkoli manipulovat. Tento názor vyjadřuje i Matěj, který je pro T3. Proto předpokládám, že se i Šimon zřejmě v průběhu diskuze DI k T3 přiklání. Na konci diskuze DI se Šimon ale přihlásí k T2.

Souhlas Šimona s T2 na konci diskuze byl pro mě trochu překvapením. Domnívám se však, že v tento okamžik došlo u Šimona zřejmě k sociálnímu přehodnocení názoru. Šimon se cítí být jedním z nejlepších matematiků ve třídě. Matěj a Andrea jsou ve třídě nejslabší. Šimon se tedy na konci diskuze při společném shrnutí zastávaných tvrzení nechce sám hlásit se dvěma nejslabšími žáky, kteří většinou mají řešení špatná. Zároveň však nesouhlasí s tím, že by nula byla sudá. Nemůže se proto přihlásit ani k tomu, že je sudolichá. Nezbývá mu proto jiná možnost než souhlasit s lichostí. Překážkou se mu nestane ani fakt, že se pro lichost hlásí sám. Nejednou již totiž v diskuzích zažil, že se k nějakému řešení hlásil sám, a přesto se nakonec ukázalo, že měl pravdu.

DII:

U Šimona se opět nedá tvrzení přesně určit, protože se snaží především nabourat tvrzení T1, že nula je jednoznačně sudá.

Nela

DI:

V žádném vstupu Nely není přímo vyjádřeno, že nula je sudá. Přesto je z jejích vstupů i z toho, jak ji znám patrné, že se k T1 přiklání.

Luboš

DI:

U Luboše bylo v protokolu zachyceno příliš málo a velice krátkých vstupů, aby bylo možné jednoznačně určit, které tvrzení zastává. Na základě vstupu 184 se ale domnívám, že s T3 pravděpodobně nesouhlasí. Podle toho, co si mi podařilo jako učiteli vysledovat během hodiny si osobně myslím, že souhlasil s T1.

Lenka

DI:

U Lenky je zachycen i vstup, kdy říká o nule „není to sudý“ (027). Vzhledem ale k tomu, že se postupně ve třídě objevila celkem čtyři tvrzení (T1 – T4), nepovažuji tento Lenčin vstup automaticky jako souhlas s T2.

Matěj

DI:

Argument T3 u Matěje zaznívá až ve 112, předtím totiž není zcela jasné, zda názor nula je NIC[64] vztahuje již i na problematiku sudosti nuly. Do té doby totiž především řeší, že nula jako NIC nejde rozdělovat.

Ema

DI:

Většina Eminých vstupů je sociálním souhlasem[65] argumentů spolužáků. Sama názory neříká, jen vyjadřuje souhlas nebo nesouhlas tím, co říkají ostatní. Proto se dá jen těžko určit, který názor v danou chvíli skutečně zastává ona. Přesto je ale patrné, že se více přiklání k T1, to však nevylučuje T4. S T3 vyjadřuje spíše nesouhlas (viz vstupy 187, 195, 199, 310).

[64] Tomuto problému se více věnuje část 5.1..

[65] Více viz str. 141

Martina

DII:

Vzhledem k textu, který Martina odevzdala (viz str. 77) se domnívám, že příčinou, proč se do DII nezapojila, bylo, že sama pro sebe už měla problém vyřešený a uzavřený. Neměla tedy potřebu do diskuze zasahovat. Problém už byl stranou jejího zájmu. Přesto si ale myslím, že kdyby začala mít pocit, že by její vstup mohl někomu pomoci, zasáhla by. Zřejmě se tak ale nestalo, a tak jen sleduje průběh diskuze. Ke svému textu nedostala zpětnou vazbu, proto se nyní ujišťuje ve svém přesvědčení novými argumenty, které v DII přicházejí, a zároveň tak i rozšiřuje své představy o nové myšlenky, které zaznívají.

Pavel

DII:

Z Pavlových vstupů nelze jednoznačně určit, jestli s T1 souhlasí. Každopádně T4 již nehájí jako v DI.

Analýza fluktuace názorů u vybraných žáků

V následujícím textu je pozornost zaměřena na sledování tří vybraných žáků v průběhu obou diskuzí - Lenku, Marka a Matěje. Výběr těchto žáků se opírá především o množství analyzovatelných vstupů zachycených protokoly. Navíc Lenku a Marka jsem zvolila, protože se u nich podařilo zachytit výrazné změny v názorech, a Matěje, protože jeho názor je naopak v podstatě neměnný.

Lenka

Fluktuaci názorů je velice zajímavé sledovat u Lenky. V průběhu diskuze DI došlo u Lenky hned k několikeré proměně tvrzení, k němuž se v danou chvíli přikláněla. Hned z počátku DI prohlásila, že nula není sudá (027). Nešlo však ani tak o souhlas s tím, že by nula byla lichá, ale pouze o vyjádření nesouhlasu s tím, že by byla sudá. Pak objevila zcela originální myšlenku rytmického střídání sudých a lichých čísel na číselné ose (089). V tu chvíli již byla pevně přesvědčena, že nula je sudá, a myšlenka rytmu se pro ni stala silným protiargumentem k T3. Její myšlenku rytmu pak dále podpořila i Martina (146), která vše znázornila na číselné ose, a několik souhlasných hlasů ve třídě.

Pak se ale náhle objevil názor Pavla o sudolichosti nuly (T4), ke kterému se začali postupně přiklánět i další žáci. Zprvu tomuto názoru ještě oponovala myšlenkou rytmu (223) a přesvědčením, že každé číslo může být přiřazeno jen k jednomu, buď k lichým, nebo sudým číslům (219). Náhle však tuto představu opustila a vrátila se k myšlence o rozdělování nuly na dvě i více nul (226). Tyto dva pohledy však spolu nepropojila, tedy ani neporovnala a žádný z nich nevyloučila. To ji přivedlo až k tomu, že připustila sudolichost nuly (243, 275, 320, 321) na základě chybného asociativního spojení možnosti rozdělování nuly na dvě nuly jako nuly sudé a rozdělení na tři nuly jako liché. Došlo tak k tomu, že opustila svou originální myšlenku rytmu a namísto toho přijala jinou cizí chybnou myšlenku o sudolichosti.

V diskuzi DII se ale k T4 již vůbec nevrací. Zřejmě v době mezi diskuzemi u ní došlo k posunu zpět z T4 na T1, přičemž sudost nuly již pro ni byla naprosto jednoznačná. Lenka si zřejmě přehodnocení svých představ z konce DI byla vědoma, protože se mě během měsíce po DI přišla několikrát zeptat, jestli se znovu o nule budeme bavit. Možná v tu chvíli cítila potřebu uvést tvrzení na pravou míru.

<u>Marek</u>

Proměnlivost zastávaných tvrzení je patrná i u Marka. Marek je hned od počátku diskuze DI přesvědčen o sudosti nuly (T1). Dokonce přináší i několik argumentů pro podporu svého přesvědčení a v intonaci některých jeho vyjádření (např. 057 nebo 059) je patrné až rozčílení, jakoby měl tendenci se za sudost nuly klidně i pohádat.

Ve vstupu 119 však najednou přichází zlom a na chvíli se přiklání k T3, že u nuly sudost a lichost určovat nejde. Tato změna je způsobena zásahem učitele (dále viz Příčiny proměn názorů žáků v DI a DII). Poté se vrací zase k T1 (zachyceno až ve vstupu 142, ale s velkou pravděpodobností se vrací již daleko dříve). Další změna názoru je u Marka zachycena ve vstupu 214, tedy v okamžiku, kdy se ve třídě objevuje nové tvrzení T4 (o sudolichosti / lichosudosti nuly). Předpokládám, že hlavní příčinou, proč se nyní k T4 přiklání je především sociální souhlas se spolužáky, kteří s ním přicházejí (dále viz Příčiny proměn názorů žáků v DI a DII).

Sociální souhlas je i příčinou opuštění T1 zpočátku DII a příklon opět k T4 (162). Když ale nad problémem začne více přemýšlet, dospěje opět k T1 (171).

Matěj

V diskuzi DII Matěj bohužel nebyl přítomen, ale v DI je zachycena celá škála jeho vstupů, které umožňují dobrý náhled na jeho úvahy. Jeho myšlenkám se podrobně věnují předchozí i následující kapitoly, protože jeho role v diskuzi je stěžejní. Co se však týče fluktuace jeho názorů, Matěj se během diskuze názorově téměř neposouvá a naopak stále trvá na svém. Jediná drobná změna, kterou je možné evidovat, je ve vyřazení nuly ze skupiny sudých nebo lichých čísel (T3) (112, 115) namísto původního přijímání lichosti (T2) (022) jako protikladu ke skutečnosti, že by nula byla sudá.

Příčiny proměn názorů žáků v DI a DII

Při analýzách vstupů žáků, ale i učitele se v DI a DII ukázalo, že změna názoru žáka v průběhu diskuze se spolužáky může mít jednu nebo více z následujících příčin:

- vstup učitele
- sociální souhlas s jedním (či více) spolužáky nebo většinovým názorem třídy
- kognitivní souhlas s vysloveným názorem
- tendence k nalezení shody, sociálního smíru

Změna názoru pod vlivem vstupu učitele

Podle mého názoru každý učitel, který nějak reaguje na žáka, činí tak na základě svého přesvědčení, že takto žákovi pomáhá. Je pak otázkou, jestli jeho reakce je skutečně žákovi ku prospěchu anebo naopak. Jeho reakce mohou podpořit žáka v úsilí, podnítit třídu k diskuzi, ale i vyvolat v žákovi strach své myšlenky příště sdělit a třídu uvést do pasivního přijímání informací.

Jak ale ukazuje následující úsek vybraný z DI, je důležité nejen to, co učitel říká, ale i kdy a jak to říká. Protože učitel může i v podstatě dobrým vstupem, který je však pronesen na nevhodném místě s nevhodnou intonací, zcela nezáměrně negativně ovlivnit i správné úvahy žáků.

118 Uč.: Hm. Dobrý. Skvělý názor.
119 Marek: No, to s tebou souhlasím asi teda.
120 Uč.: Kdo by s Matějem souhlasil?
121 Vojta: Jo, asi tak středně.
122 Uč.: Jeden.
123 Ondra: Já nevim, já možná jo.
124 Uč.: Dva. Tří.
125 Uč.: Kdo je tak jako na půl?
126 Lenka: Ne, pani učitelko, vůbec.
127 Ondra: Já tak trochu.
Šum třídy.
128 Uč.: Kdo by s tím vůbec nesouhlasil, že to není možný?
129 Uč.: To je vás většina.

Jako učitelka jsem pochválila chybný názor žáka ve snaze zachovat si neutrální postoj ke správným, ale i chybným tvrzením žáků. Tato pochvala je však intonačně, ale i obsahově výraznější, než byly pochvaly ostatních myšlenek. To žáky znejistí. Jejich váhání umocní ještě i skutečnost, že si začnu mapovat, kdo souhlasí s chybným názorem žáka. Dokonce si počty souhlasů chci spočítat. Dochází tedy k určitému tlaku na žáky. Kdo nevyjádří souhlas s pochváleným názorem žáka, vyjádří tak vlastně nesouhlas se mnou, s učitelkou. Tomuto tlaku do jisté míry na chvíli podléhají Marek (119), Vojta (121), Ondra (123) a možná i někteří další, kteří ale záznamem nebyli zachyceni.

Ač má reakce na tomto místě se ukázala jako ne příliš šťastná, přesto si ale myslím, že i z této ukázky je vidět, že jinak jsou žáci v duchu VOBS vedeni dobře. Kdyby byli žáci zvyklí na transmisivní výuku, předpokládám, že počet žáků, kteří by projevili souhlas s učitelkou, by bylo daleko více, ne-li všichni, a nebyly by u nich patrné známky váhání, jako jsou zde.

Jako největší ocenění pro mě jako učitelku považuji vstup Lenky (126), která veřejně proti schválenému názoru vystoupí. Nepřijímá tedy pasivně, co říkám, ale naopak o tom přemýšlí a dokonce se cítí natolik bezpečně, že se nebojí projevit i nesouhlas.

Tento vstup Lenky i způsobí, že Ondra ještě trochu oslabí svůj předchozí váhavý souhlas. Zřejmě je též podnětem k posílení nesouhlasu s mou (učitelčinou) pochvalou, ke kterému dochází v šumu třídy, jak ukazují hned mé následující vstupy (128, 129). Na tuto třídu tedy ani nevhodný zásah učitelky neměl rozhodující vliv, žáci se vrací ke svým myšlenkám a v diskuzi pokračují dál.

Změna názoru jako projev sociálního nebo kognitivního souhlasu

Při diskuzích běžně dochází k tomu, že žáci mezi sebou přebírají své názory, pokud s nimi souhlasí. Jestliže žák argumenty spolužáka nejprve promýšlí, porovnává je se svými zkušenostmi a představami dříve, než je schválí, mluvíme o kognitivním souhlasu. Žák ale může s druhým souhlasit i bez toho, že by o jeho myšlenkách nějak více uvažoval, a o jejich správnosti se rozhoduje spíše na základě emocí opřených o osobní sympatie, o příklon k matematicky silnějšímu spolužáku či názorové většině třídy. V tomto případě mluvíme o sociálním souhlasu. Nejčastějším typem sociálního souhlasu jsou jednoslovné nebo velmi krátké výpovědi jako např. u Emy (009, DI): Jo, je. - nebo u Bořka (002, DI): Dyť jo.

Vlivem sociálního souhlasu došlo v DI i v DII nejednou i ke zcela zásadní proměně názoru u některých žáků. Ze zaznamenaných vstupů žáků šlo přitom především o takové změny, které znamenaly opuštění správné myšlenky a příklon k té špatné.

Síla sociálního tlaku se tak projevila například u Lenky. Lenka opustila T1 a začala hájit T4. Příčina, proč raději převzala cizí špatný názor namísto toho, aby věřila své v podstatě dobré myšlence, je zřejmě zakotven v její sebedůvěře. Lenka není typ, který by šel se svým názorem proti většímu počtu dalších žáků. Viděla, že k tvrzení T4 se přiklání čím dál více žáků. Začala tedy zvažovat to, co říkali ostatní a přitom úplně vytěsnila svůj původně silný argument rytmu. A tak namísto toho, aby své zvažování opřela o kognici, o své izolované modely, přeformulovala cizí argumenty spíše na základě sociálního souhlasu. Sociální tlak ji tak přiměl převzít špatnou myšlenku a vzdát se své dobré. Z toho je možné usuzovat, že matematické sebevědomí Lenky je výrazně nižší, než je tomu u Matěje. Matěj se nebál jít ani proti skoro celé třídě.

Sociální souhlas se též výrazně projevil i u vstupu Marka. Marek se v diskuzi DI přiklonil k tvrzení T4 především z důvodu kamarádství s Bořkem a Pavlem. Jakoby v tu chvíli zapomněl na všechny své předchozí argumenty pro T1. V době po DI u něj ale možná došlo ke kognitivnímu zhodnocování toho, s čím předtím sociálně souhlasil, protože otázka sudosti nuly v jeho hlavě zůstala. Znovu ji proto otvírá v DII.

Toto pnutí mezi sociálním a kognitivním souhlasem se mi podařilo zaznamenat hned u několika žáků. Velice výrazně je ho však možné pozorovat právě u Marka v krátké epizodě z DII.

162 Marek: Pani učitelko, ale zase Bořek měl pravdu, že to může bejt sudolichý, jak jsem teďkon zjistil podle mých výpočtů. Protože kdybysme šli po pěti, tak to bude nula, pět, deset... (stranou na tabuli zapisuje tato čísla.)
165 Marek: No právě, proto to je sudolichý i.
167 Marek: Hm. Je to podle mě takový, no...
169 Marek: No, to máš zase pravdu *(ukazuje na Emu). (Θ)* No, to máme, to máš zase pravdu, ehm, že, že začíná tou sudou, má bejt. (Θ)
171 Marek: *(Šťastně hopsá od tabule)* Sudá.

V DI se Marek přiklonil k tvrzení T4 jako jeho kamarádi. I nyní v DII cítí, že jeho kamarád Bořek zůstal v diskuzi sám, a tak využije příležitosti, aby se ho zastal (162). V předchozích vstupech slyšel, že v případě růžice s pěti vrcholy budou u severu sudá i lichá čísla. Rytmus si zatím neuvědomuje, a tak souhlasí se sudolichostí nuly (i vstup 165). Když je ale na rytmické střídání sudých a lichých čísel na severu růžice spolužačkou upozorněn, začíná váhat (167) a kognitivně přehodnocovat svůj předchozí vstup. Dochází tak k rozporu sociálního a kognitivního souhlasu uvnitř něj. Sociálně chtěl Marek původně chránit Bořka, ale v jeho příklonu k T1 je možné spatřovat, že v jeho hodnotovém systému nyní vítězí pravda nad náklonností ke kamarádovi. Proto dává za pravdu spolužačce (169) a definitivně se vrací k T1 (171). Je velice šťastný z toho, že odhalil pravdu a svou velkou radost dává najevo i pohybem. Vítězství kognice tak oslavuje radostným hopsáním zpět do lavice.

Pnutí mezi sociálním souhlasem a kognitivním je v náznacích možné sledovat také u Andreji v průběhu celé DI. Andrea stejně jako Matěj zastává pouze sémantický pohled na nulu (tedy T3). Ač jsou ale názory Andreji na první pohled identické se vstupy Matěje, přesto je mezi nimi možné najít rozdíl. Zatímco totiž Matěj má jeden neměnný názor, který se snaží hájit po celou dobu diskuze, u Andreji její přesvědčení kolísá. Na tom se podílí právě tyto dva typy impulsů, sociální a kognitivní.

Sociálně Andrea Matějovy myšlenky nikdy nezpochybní. Příčin zde může být hned několik. Vezmeme-li prostředí třídy, oba tito žáci sedí každý sám v lavicích za sebou. A jelikož vzhledem k uspořádání třídy jsou tak trochu stranou od ostatních spolužáků, mají největší kontakt právě spolu, a to nejen při práci ve dvojici. Oba jsou také oproti ostatním spolužákům nápadní hodně nízkým vzrůstem. Navíc Andrea i Matěj patří spíše mezi slabší žáky na matematiku se silnou potřebou sémantizace, a proto svým argumentům navzájem rozumí. Ještě větší význam má však zřejmě skutečnost, že oba bydlí v domech vedle sebe dále od ostatních spolužáků, znají se tedy od malička a i venku si hrají velmi často spolu. Možná tedy Andrea cítí spíše potřebu s ním souhlasit, protože jednoduše nechce narušit jejich přátelství.

Kognitivně však o tom, co Matěj tvrdí, již není vždy tak skálopevně přesvědčena. Místy se proto objevuje zvažování původně zastávaného názoru či příklon k názoru někoho dalšího (244). Podstatný rozdíl v přístupu Andreji a Matěje je tedy v tom, že ona sama je ochotna případně připustit názory ostatních, zatímco on ne.

Tendence k nalezení sociální shody jako důvod pro změnu názoru

Jak již bylo uvedeno v části 4.3. důsledkem tendence nalézt sociální smír je zřejmě přijetí lichosudosti (sudolichosti) nuly (T4) většinou žáků na konci DI. Diskuze o otázce, jestli je nula sudá, byla velmi dlouhá a tvrzení žáků se tříštila. Jestli je nula sudá (T1), jestli je lichá (T2), či zda je možné vůbec něco takového u nuly určovat (T3). Proto možná došlo k vytvoření T4 a tolik žáků se k němu přiklonilo. Cítili, že přijetím tvrzení T4 dospívají k určitému kompromisu mezi tvrzením, že nula je sudá, a tvrzením, že nula je lichá, které v sobě skrývalo především vyjádření souhlasu s tím, že nula se nechová jako žádné jiné sudé číslo.

4.6. Řešení otázky sudosti nuly v dalších třídách

Zajímalo mě, jak sudost nuly řešili v jiných třídách a jestli i ještě jiní žáci použili pojem sudolichý. Oslovila jsem proto několik dalších učitelů, kteří se také snaží ve svých hodinách matematiky pracovat podle metody VOBS. Odpovědi těchto učitelů jsou v levém sloupci tabulky.

Mým záměrem bylo porovnat své výstupy z diskuzí o sudosti nuly s tím, co napsali učitelé o řešení problému v jejich třídách. Na celé této komparaci bylo ale složité, že mohu vycházet jen z toho, co mi učitelé napsali (tedy ve většině případů z toho, co si pamatují, protože pouze jeden z nich si vede skutečný pedagogický deník). Další nesnází pro realizaci porovnání diskuzí mé třídy s jinými představuje skutečnost, že mé diskuze v podstatě vznikly díky Matějovi. Matěj nebyl ochoten pustit nulu ze sémantické roviny do strukturální, a proto ani nesouhlasil s možností určovat u ní sudost nebo lichost. Matějovi vstupy byly pro mou třídu výzvou hledat další a další argumenty, jak by ho mohly přesvědčit. U ostatních učitelů se takový žák nevyskytl. I když věřím, že i v těchto dalších třídách vznikly zajímavé diskuze, zřejmě neměly takový rozsah a k dořešení problému žáci dospěli mnohem rychleji, než tomu bylo v mé třídě.

Komparaci jsem tedy zaměřila na porovnání výskytu tvrzení (A1 – F3) zformulovaných ze vstupů mých žáků s argumentacemi, které jsou zachyceny v odpovědích učitelů. Prostřední sloupec tabulky proto přináší komentáře k textům od učitelů, které u nich mapují výskyt tvrzení dokládajících sudost nuly. V případě shodnosti těchto tvrzení s mými, je pak ve třetím sloupci uvedeno jejich označení.

Z korespondence učitelů

Na sudost-lichost nuly jsme narazili tuším asi dvakrát v různých ročnících. Diskuze, pokud mě paměť neklame, nebyla nikdy dlouhá. Nejsilnějším argumentem bylo, že sudá a lichá čísla se střídají, takže pokud jdu dolů 2 - sudé, 1 liché, ...0, -1 liché, ... nula musí být sudá. Padl i argument, že sudé číslo musí být dělitelné 2 -- a nulu mohu dvěma dělit, ale to se některým zdálo dost špatně uchopitelné. (p. uč. Martina, Praha)	Jako nejsilnější argument paní učitelka Martina uvádí v její třídě argument rytmu na číselné ose. Dalším argumentem, který zaznamenala, byla i dělitelnost čísla dvěma, tedy možnost rozdělit číslo na dvě stejná čísla. Možná právě obtížná manipulovatelnost s nulou způsobila, že tento argument nebyl přijat celou třídou.	B1, A1
Co se týká nuly, u nás jí berou automaticky jako sudou, protože se střídají sudá a lichá čísla. (p. uč. Lenka, Třebíč)	V této třídě zřejmě nějaká větší diskuze neproběhla, protože si paní učitelka Lenka více o jejím průběhu nepamatuje. Se sudostí žáci zřejmě souhlasí. Je však otázkou, jestli zmiňovaný argument rytmu je pro žáky považován za hlavní tak, jako je zřejmě pro paní učitelku.	B1
[Žáci] přesně věděli, že je nula sudá. To sice také trvalo, ale o sudosti nuly byli přesvědčeni časem všichni. Sice: všechna čísla, která končí nulou, jsou sudá. Tedy i nula je sudá. Argument, když nemám nic, jak to napáruji? rozbili číselnou řadou. Na ní se totiž pravidelně střídají sudá a lichá čísla:.... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.... Mínus 1 a 1 jsou liché, pak nula je sudá, aby to vycházelo. (p. uč. Jitka, Neratovice)	Paní učitelka Jitka si vybavuje sérii argumentů, které při diskuzi vznikly. Zřejmě tedy diskuze v této třídě měla i delšího trvání. Objevily se argumenty o sudosti čísel končících nulou, o párování čísel (tedy skládání čísel), rytmu na číselné ose a umístění sudého čísla v tomto rytmu mezi sousední čísla lichá.	C1 A2 B1 B3

Určitě jsme řešili sudost nuly a určitě opakovaně. Vzpomínám si, že někdy v druhé nebo třetí třídě to bylo přes řadu a pravidelnost, vloni tuším to bylo jako znak dělitelnosti dvěma. Nevzpomínám si už ale kdy přesně, musela bych to dohledat. Ale určitě nezaznělo, že je sudolichá. (p. uč. Jarka, Praha)	I zde diskuze trvala déle, jak naznačuje paní učitelka. Neměla ale příliš bouřlivý průběh a postupně (i časem) došlo k vyjasnění problému. Z argumentů paní učitelka uvádí rytmus (zřejmě na číselné ose) a dělitelnost dvěma.	B1, A1
Shodou okolností jsme včera řešili úkol "sudost vs. lichost" čísel a na 0 jsme narazili - děti řadily 0 spíše mezi sudé. Odůvodnění několika "pátravých hlav" bylo, že liché číslo je 1 a před ním je sudé 0- že v pomyslné řadě čísel nestojí liché vedle lichého, proto je 0 sudá. V aktivní diskuzi bylo cca 5-7 dětí- jejichž výsledek jsem ti popsala. Většina se přikláněla k sudosti, ale bylo i cca 5 dětí- jejich názor byl pro 0- lichá. Měj se pěkně. (p. učitelka Katka, Praha)	Jako argument pro sudost nuly paní učitelka Katka uvádí tvrzení, že sousedním číslem čísla lichého na číselné ose je číslo sudé. Paní učitelka se zmiňuje i o tom, že někteří žáci byli i pro, že nula je lichá. Argumenty těchto žáků však nejsou uvedeny a bohužel je paní učitelka ani dodatečně nedoplnila.	B4
Žáci procvičovali násobilku, používali tabulku násobení. Měli za úkol psát na mazací tabulku pouze výsledky diktovaných příkladů. Učitelka pro kontrolu napsala výsledky řešených příkladů na tabuli. Výsledky měli žáci rozdělit „do dvou košů“. Mezi řešenými příklady byl také výsledek 0. Jedním z kritérií dělení, které žáci navrhovali, bylo rozdělení výsledků na sudé a liché. Takovéto rozdělení čísel bylo pro žáky snadné, nejasný byl pouze případ přiřazení čísla 0.		

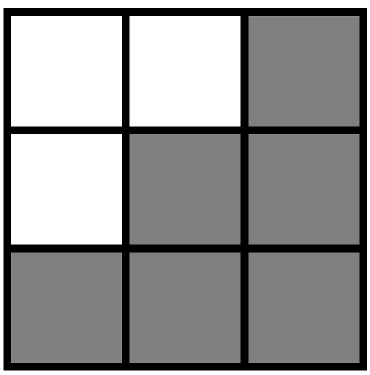
<u>Argumentace:</u> *Markétka: 0 je sudá, protože 0 se dá rozdělit na nic a nic, a to je stejný.* (Doprovází svůj názor gesty, 0 a její dělení ukazuje jako sevřenou pěst, ve které nic nemá.) *Učitelka 1: Co na to říkáte?* *Dan: Ano, je to stejné.* Postupně se přidávají další děti. Ve třídě se zvyšuje hluk, další žáci přitakávají a vyslovují svůj souhlas s uvedenou argumentací. *Učitelka 2: Má někdo jiný názor?* *Natálka: 0 musí být sudá, protože čísla se v řadě pravidelně střídají a jednička, co je za nulou je lichá, takže 0 musí být sudá, aby se to pravidelně střídalo.* Třída přijímá uvedené argumenty a řadí číslo 0 mezi sudá čísla. Učitelka napíše obě argumentace na nástěnku matematických objevů třídy. POZN: Z předchozí argumentace: Číslo je sudé, jde-li spravedlivě rozdělit na dvě stejné části a to beze zbytku. Čísla 2, 4, 6 … jsou tedy sudá. (zápis z ped. deníku ze 2. roč. p. uč. Hedviky, Brno)	Odpověď paní učitelky Hedviky poskytuje nejpodrobnější záznam už proto, že jde o výňatek z pedagogického deníku, který si vede. Opět se zde objevují argumenty, které jsem zachytila i ve své třídě – rozdělování na dvě stejné části (ukázka pomocí prázdné pěsti je blízká prázdným pytlíkům Marka v mé třídě viz dále v 5.1.4.), rytmus na číselné ose a umístění sudého čísla v tomto rytmu hned vedle čísla lichého.	A1 B1 B4

Z korespondence učitelů není možné rozpoznat, za jak dlouho jejich žáci dospěli k objevení sudosti nuly. Ale argumenty, které k tomuto odhalení přispěly, byly obdobné jako v naší třídě. Nejčastějším a zřejmě i nejpádnějším argumentem byl argument rytmického střídání sudých a lichý čísel na číselné ose. Podle slov učitelů se tak zřejmě v jejich diskuzích vyskytla tvrzení odpovídající tvrzením B1, B3 a B4 v naší diskuzi. Dále se též objevily argumenty posuzující sudost na základě možnosti rozdělování čísel na dvě stejné části (tvrzení A1), tedy dle slov některých učitelů jako znak dělitelnosti dvěma. A v neposlední řadě se i jeden z učitelů zmiňuje i o sledování nuly na konci vícemístných sudých čísel, o tvrzení C1.

Nikdo z učitelů se však nezmínil, že by se u nich objevilo použití termínu sudolichý tak, jako tomu bylo v mé třídě. Tento překvapivý termín je však možné nalézt v archivu M. Hejného.

Termín sudolichý se objevil při určování obsahu polymina (mnohoúhelníku vytvořeného ze souboru stejných čtverců). Jeden z žáků považoval obsah polymina za sudý, když šlo toto polymino pokrýt kostkami domina (dominová kostka je tvořená ze dvou čtverců). Pro tohoto žáka byl tedy obsah bílého trimina a obsah šedivého hexamina na obrázku (viz obr. 21) číslo liché, protože ani jeden z těchto útvarů nelze pokrýt kostkami domina. Jeho spolužáci ale poukázali na to, že šedé hexamino je vytvořeno ze šesti kostek a 6 je číslo sudé. Žák se proto rozhodl nazvat tato čísla sudolichá.

Označení sudoliché tak představuje spojení aritmetického a geometrického pohledu na obsah útvaru. Z hlediska aritmetického je šedý tvar sudý, ale z hlediska geometrického lichý, protože nelze pokrýt kostkami domina. Celkově se o něm tedy dá říci, že je sudolichý.



Obrázek 21: Určování sudosti nebo lichosti z obsahu polymina

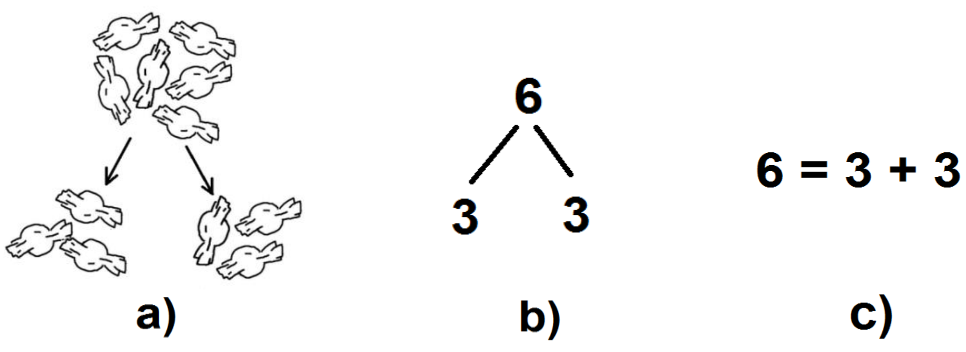
5. Další řešené problémy nuly

5.1. Jde nula rozdělit?

Dalším problémem, který se objevil v průběhu řešení otázky sudosti nuly, bylo, jestli je možné nulu rozdělovat. V souvislosti s tím pak vyvstala ještě otázka, pokud je nulu možné rozdělit na části, zda jsou tyto části stejné.

Již od 2. ročníku ve třídě panovala shoda na následujícím vymezení slova sudý: číslo je sudé, když se dá napsat jako součet dvou stejných čísel, které v jejich dětském vyjádření znělo: *číslo je sudé, když se dá rozdělit na dvě stejná čísla* (viz Příloha 3). Aniž by to bylo řečeno, přitom automaticky předpokládali, že se pracuje v oboru celých čísel (většina však měla zřejmě na mysli jen celá nezáporná čísla)[66]. Stejně tak, ač vyjádření není takto přesné, chápali vymezení ve smyslu, že číslo je sudé právě tehdy, když se dá rozdělit na dvě stejná čísla (když se dá číslo takto rozdělit, je sudé, a když je sudé, dá se tak rozdělit). Z popsaných, ale i dřívějších diskuzí je jasné, že toto původní vymezení sudosti všichni respektují, protože nikdy proti němu nebyly vzneseny žádné námitky.

Při určování sudosti čísla si dle svého vymezení žáci například řekli, číslo 6 je sudé, protože jde rozdělit na 3 a 3. Pod těmito slovy si někteří představovali proces spravedlivého rozdělování předmětů mezi dvě děti (např. rozdělování bonbonů do dvou hromádek přesouváním vždy jednoho bonbonu do jedné hromádky a jednoho bonbonu do druhé hromádky atd.) (obr. 22 a), někdo zase grafický záznam pomocí tzv. vidliček (obr. 22 b) nebo strukturální zápis 6 = 3 + 3 (obr. 22 c). Takto byli žáci v mé třídě schopni pracovat se všemi přirozenými čísly.



Obrázek 22: Různé představy rozdělení čísla 6

[66] Pokud není uvedeno jinak, v tomto duchu je o oboru čísel uvažováno i v práci.

Problém ale nastal v okamžiku, kdy došlo k potřebě rozdělit také nulu. Obtížná sémantická uchopitelnost nuly způsobila, že žáci, kteří ještě tolik neviděli do struktury čísel, nad možností rozdělování nuly váhali nebo ji dokonce zcela odmítli. Hlavní překážky bránící strukturálnímu porozumění nule při tom vycházely ze zkušenosti s odlišným chováním nuly v porovnání s jinými dosud poznanými čísly.

a) S nulou nelze nijak manipulovat, NIC[67] nelze uchopit. Dělení je tedy jen ve slovech, ve skutečnosti není co dělit (více viz část 5.1.1.).

b) Pokud nulu (tj. NIC) začneme rozdělovat, dostáváme opět nulu (tj. NIC). Ze sémantického pohledu tedy po rozdělení celku (NIC) na dvě stejné části je každá z těchto částí stejně velká jako celek (opět NIC). Takto se nechová žádný jiný objekt, tedy ani číslo (v části 5.1.2.).

c) Nulu lze napsat jako součet dvou nul (0 = 0 + 0), ale i tří (0 = 0 + 0 + 0), čtyř (0 = 0 + 0 + 0 + 0) atd. Nula se tedy dá rozdělit na libovolný počet stejných částí. Žádné jiné číslo takto dělit nelze. U všech čísel kromě nuly je toto dělení konečné (5.1.3.).

Překážka formulovaná pod písmenem *„a"* vychází ze sémantického vnímání situace, podle kterého nula je NIC, a to je nemanipulovatelné. V sémantice NIC nelze vzít a nějak s ním zacházet. Překážka *„b"* je na pomezí mezi sémantikou a strukturou a dává nulu (NIC) do protikladu se všemi objekty i přirozenými čísly. Překážka „c" je již strukturální a dává nulu do protikladu se všemi přirozenými čísly. Obě tak ukazují, že nula se oproti jiným číslům chová zcela výjimečně. To, co totiž platí ve struktuře pro ostatní přirozená čísla, pro nulu neplatí. Dochází tedy k zpochybnění

[67] Rozdíl mezi používáním slova nula a NIC je v tom, že NIC patří pouze do sémantiky, zatímco nula může vstupovat i do struktury. Je potřeba si však uvědomit, že toto rozlišení je analytické. V hlavě žáka (především Matěje) je synkretická představa, která tyto pojmy v sobě zahrnuje (ve smyslu Vygotského, 1971). Pro analýzu je tedy velmi obtížné oba tyto pohledy rozlišit, protože ani žáci je často nerozlišují, neuvědomují si, že jsou různé, a proto je i zaměňují. Typickým příkladem je, když žák mladšího školního věku nerozlišuje mezi pojmy kruh a kružnice. Synkretické užívání pojmů je také charakteristické pro malé děti kolem 18 měsíců, když se začínají učit mluvit. Například můj syn v tomto věku slovem „brm" nahrazoval slovesa jet, chodit, ale i malovat jako i další slovesa znamenající pohyb.

Matěj i někteří další žáci slovy nula, nic, NIC označují prázdnou množinu. V jejich vědomí je však dominantní pohled sémantický, který nulu (NIC) vyřazuje ze struktury ostatních čísel, a tato skutečnost je zachycena velkými písmeny slova NIC. Pojem nic s malými písmeny je používán v místech, kde má smysl počtu a nahrazuje použití nuly v běžném životě (např. Nic ti nedlužím.). Rozlišení nic a NIC v konkrétních případech je však silně subjektivní.

mluvit o nule ve struktuře. A proto i žákovo odmítnutí určovat u nuly sudost je oprávněné, protože slovo sudý je uloženo ve struktuře.

5.1.1. „A nic prostě je NIC. A to NIC, to se nedá dělit.“

V sémantické hladině je nula považována za NIC. Použití slova rozdělit v běžném životě znamená nějakou akci, a ta se vztahuje vždy k nějakému existujícímu objektu. Pokud je tedy nula chápána pouze jako NIC (jako něco, co nelze uchopit, co neexistuje), pak se toto NIC rozdělovat nedá. Tuto představu je možné formulovat následující trojicí tvrzení:

1. Nula je NIC.
2. Manipulovat (a tedy i rozdělovat) jde jen s existujícími objekty.
3. NIC je pouze slovo, ale jako něco hmatatelného neexistuje.

Čistě sémantický pohled na nulu je patrný především ve vstupech Matěje v DI[68]. Matěj odmítá jakoukoli manipulativní činnost s nulou. Argument, že nula je NIC a s jako takovou s ní nejde nijak zacházet, se promítá skoro do všech jeho vstupů a i je pro něj odpovědí na většinu snah jeho spolužáků mu tento jeho názor vyvrátit.

020 Matěj: Nic je prostě NIC *(zbytek není rozumět).*
078 Matěj: Ale nula je NIC, NIC, a to přece neexistuje.
107 Matěj: Ale nula je jakoby NIC.
109 Matěj: A nic prostě je NIC. A to NIC, to se nedá dělit. Ale ty by si dokázal rozdělit nulu?
141 Matěj: No, a je tam ještě nic z ničeho a je to NIC. To jim nevysvětlíš. *(Zřejmě jde o zachycený úryvek individuální diskuze s Šimonem.*)
165 Matěj: Jo. *(Není rozumět)*, to je jakoby z toho ničeho a bylo to NIC. To se nedá nějak rozdělit. To je jako já nevím, jak to říct. To je nic, a to NIC se nedá rozdělit a nula je to NIC.
237 Matěj: Ale počkej, ale jakoby třeba viděls někde jakoby, jakoby třeba v matematice nebo tak, že jakoby nula se dá rozdělit? Já teda ne.

[68] Pokud není uvedeno jinak, všechny uváděné vstupy v textu i v tabulkách v kapitole 5 pochází z DI (protokol celé DI je uveden v Příloze 1) V DII problému možnosti rozdělování nuly již nebyla věnována pozornost.

Jak je z této ukázky vstupů vidět, Matěj jen v drobných obměnách stále opakuje základní přesvědčení, že nula je NIC, a proto ji nejde rozdělovat. Toto tvrzení však nemá podložené dostatečně silnou argumentací, kterou by ostatní přesvědčil. Tento nedostatek zřejmě i cítí, proto se své myšlenky snaží podepřít alespoň skutečností, že ani v učebnici matematiky se nikde o rozdělování nuly nemluví. Kdyby se tedy nula rozdělovat dala, pak by se o tom v učebnici jistě psalo a my bychom se to učili.

Nahrazením nuly slovem NIC se Matěj snaží ukázat, že nula do strukturální oblasti matematiky vůbec nepatří. Avšak i samotné NIC (neexistence objektu) je samo o sobě také velmi složité na uchopení, a tak Matěj hledá různé způsoby, jak ho zkonkretizovat.

104 Matěj: Ale to není nic tahleta flaška.

Matěj (104) reaguje na vstupy spolužáků (101 - 103), které řeší, zda jde obsah prázdné láhve rozdělovat. Šimon (101) na příkladu vypité láhve v podstatě tvrdí to samé jako Matěj, že pokud v láhvi nic není, nemohu to rozdělit. Matěj ho však nepochopí a vnímá jako hlavní argument pouze láhev. Stále se snaží prosadit chápání nuly jako něčeho neexistujícího a tuto myšlenku nevhodně přenáší i na představu láhve. Když totiž v láhvi nic není, je zbytečné o ní mluvit.

235 Matěj: Já si myslím, že to jsou. Dovolíš? *(Bere si fix na interaktivní tabuli od Amálky). (Θ)* Jakoby, kdyby byly třeba dva vymyšlený paňáčci, který jakoby nejsou, který neexistujou, tak je nemůžeme rozdělit, protože jako neexistuje, anebo třeba *(Θ)...*
309 Andrea: Jak říkal Matěj. Prostě třeba, když si panáčka, nějakýho panáčka myslím ve v mysli, tak neexistuje prostě. My si ho jenom myslíme.

Nyní na modelu panáčků (235), kteří figurují pouze v naší mysli, se Matěj za podpory Andreji (309) snaží ukázat, že pokud objekt v naší realitě neexistuje, nemůžeme ho vzít do rukou, těžko jej pak můžeme rozdělovat.

Andrea stejně jako Matěj vnímá nulu sémanticky. Občas je sice u ní možné zaznamenat drobné pochybnosti, ale jinak s Matějem souhlasí po celou dobu diskuze.

030 Andrea: Jak se to může rozdělit na nula a nula? To je k ničemu.
075 Andrea: Ale nula nejde na vůbec nic rozdělit.
169 Andrea: Ale jak můžeš chytit vzduch do ruky?[69]

Pod slovem rozdělit si Andrea (030, 075) zřejmě představuje nůž a krájení. Použití slova rozdělit tedy vztahuje jen k nějakému existujícímu objektu, tak jak to zná z běžného života. A proto stejně tak není možné krájet např. vzduch (169), protože ho nemůžeme vzít do ruky. Jestliže nula je NIC, pak toto NIC se nedá rozdělit na nula a nula. Podle ní je to vše nesmysl.

Na základě protokolu DI je zřejmé, že také Šimon nulu v kontextu rozdělování čísel chápe sémanticky.

101 Šimon: Pani učitelko, to je jako, když vezmu flašku s vodou a všechno by bylo vypitý, tak to to, *(Θ)* prostě tu úplně prázdnou flašku nemůžu nějak rozdělit.
103 Šimon: Jenomže tady jde o ten obsah, ne o tu flašku.[70]

Šimon (101, 103) to NIC dává do láhve a operaci rozdělování přenáší do přelévání. Přičemž jeho představa se zakládá na tom, že pokud budu mít v láhvi vodu, mohu ji rozlít do dalších nádob. Pokud ale v láhvi nebude nic, nemám co rozlévat. Prázdnou láhev, tedy její obsah, dělit nemohu.

[69] Reakce na Martinu (167): *„Ale to je jako, když máš vzduch, tak to jako taky neni nic."*
[70] Reakce na Bořka (102): *„Můžeš rozdělit flašku"*, který by zřejmě rozbil skleněný obal lahve.

5.1.2. „Z A-čtyřky[71] udělat A-čtyřku, to neuděláš.“

Upozornění na zvláštní chování nuly oproti jiným číslům, tedy že bychom po jejím rozdělení dostali opět nulu, je zachyceno už v dříve zmiňovaném vstupu Matěje (165).

165 Matěj: Jo. *(Není rozumět)*, to je jakoby z toho ničeho a bylo to NIC. To se nedá nějak rozdělit [...].

Skutečnost, že by část celku byla stejně velká jako tento celek, je pro Matěje nepřijatelná. Na stejnou věc upozorňují dále také Šimon (254, 305) a Andrea (259).

254 Šimon: Anebo třeba, když mám papír, to je jako nula, a ten papír chci rozdělit na, *(Θ)* jako na A-čtyřkovej papír. Na A-čtyřkovej papír a jako rozdělit ho na A-čtyřkovej papír, to nejde.
259 Andrea: Ano, ale z A-čtyřky udělat A-čtyřku, to neuděláš.
305 Šimon: Ale nemůžeš z toho mít jen jeden, to je, jakoby si udělala jeden krát jedna, tak z toho jako nemáš celou jedničku nebo dvě.

Šimon se pokouší za podpory Andreji pomocí modelu papíru ukázat, že při rozdělování vždy dochází ke změně velikosti. Životní zkušenost žáků je založena na vícekrát opakovaném procesu – mám celek, ten rozdělím na dvě neprázdné části a každá tato část je menší než původní celek. Ze životní zkušenosti žáci neznají, že by se rozdělením velikost rozdělovaného objektu vůbec neměnila. Proto zjištění, že nula se po rozdělení stane opět součtem nul, tedy že část je stejně velká jako celek, je pro žáky překvapením.

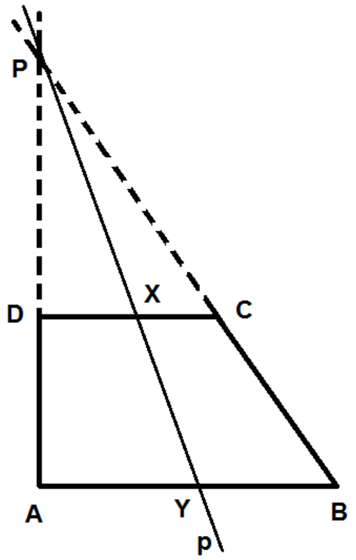
Uvedený didaktický jev mě vedl k zamyšlení nad možnostmi, které má učitel, aby mohl žákům ukázat, že mohou nastat případy, kdy část a celek jsou stejně velké.

Situace, kdy celek je stejně velký jako jeho část, může nastat u nekonečných objektů. Např. na přímce *p* leží body *A, B* jako počátky polopřímek *AB* a *BA*. Každá polopřímka je částí přímky p a přesto platí, že část je stejně velká jako celek.

Jako další, a pro žáky možná srozumitelnější příklad, může posloužit úloha, zda v pravoúhlém lichoběžníku *ABCD* (obr. 23) leží více bodů na jeho straně tvořené úsečkou *AB* nebo úsečkou *CD*. Logická odpověď žáků je, že přeci více bodů je na straně *AB*, protože je delší. Využitím představy manželství následuje proto další

[71] A-čtyřkou je brán list papíru o velikosti A4.

úkol pro žáky – prodloužit strany lichoběžníku *AD* a *BC* tak, aby se protnuly v bodě *P*, a tvořit páry, kdy muž je vždy bod na úsečce *AB* a žena bod na úsečce *CD*. Tyto body (např. *X, Y*) vytváří manželský pár, pokud jsou spojeny přímkou (např. *p*) vedenou z bodu *P*, která protíná strany *AB* a *CD*. Po výzvě najít ženu (bod náležící úsečce *CD*), která nemá svého manžela (bod na úsečce *AB*), a obráceně, žáci objeví, že bodů na úsečce *AB* a *CD* je stejně. Toto zjištění je pro ně šok, protože doposud o úsečce neuvažovali jako o množině bodů. I kdyby tedy úsečka *DC* byla polovinou úsečky *AB*, stále bude platit, že na obou bude přesně stejně bodů, stejně jako je tomu u nuly rozdělované do dvou nul.



Obrázek 23: Lichoběžník k úloze vedoucí ke vnímání úsečky jako množiny bodů

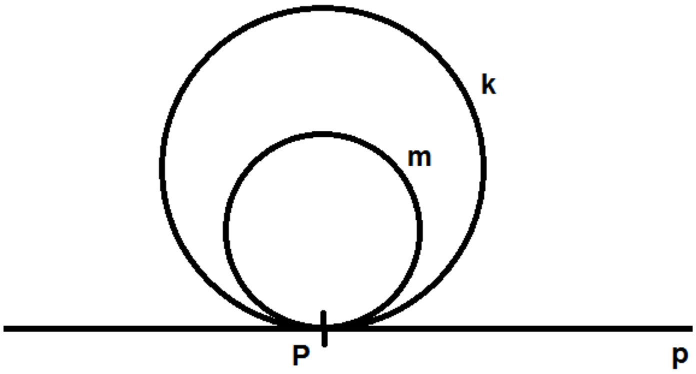
Tato nenadálá překvapení člověk zažívá vždy, když se dostane do oblastí, ve kterých se nemůže opřít o své smysly. I úvaha 0 = 0 + 0 je za horizontem našeho smyslového poznání a je již v oblasti abstraktní. Proto žáci, kteří tuto úvahu nepřijímají, pomyslnou čáru tohoto horizontu v této situaci ještě nepřekročili.

Za velice zajímavý vstup, který také využívá modelu papíru při zvažování rozdělování nuly, považuji vstup Nely (304).

304 Nela: Jako kdybysme ten, tu nulu, jako ten papír jako, nebo jako tam tu nulu vydělíme těma dvěma, to jsou jako dvě nuly, ale třeba menší nuly jako, že jako třeba jako s tím papírem, že to nejde rozdělit na A-čtyřkovej papír, ale na A-pětkovej, takže jako...

Nela nesouhlasí s tvrzením Matěje, Šimona a Andreji, že nula nejde rozdělit. Snaží se proto využít jejich příkladu s papírem, aby problém přiblížila jejich sémantickému pohledu. Nela zkušenost z rozdělování papíru přenáší na nuly, a tak vlastně vytváří další sémantický kontext nuly. Prvním tímto kontextem bylo chápání nuly reprezentované slovem NIC, tedy jako objektu, který je vytržen z matematiky. Druhý sémantický kontext nuly v podání Nely ukazuje, že při rozdělení nuly do dvou nul jsou na první pohled všechny nuly stejné. Když si ale řeknu, že vše, co dělím na dvě části, se zmenší, tak i u nuly dojde k tomu, že větší nula se rozdělí do menších nul.

Ani z matematického hlediska však Nelinu sémantizaci, která připouští větší a menší nuly, nelze považovat za úplnou hloupost. Představa menší nuly má jakési své opodstatnění. Původ myšlenky pochází ze 17. století (Hutten, 1795) v souvislosti s velikostí úhlu *(angle of contact)*. Je přímka *p* a na ní bod *P*. Kružnice *k* o poloměru r_1 se dotýká přímky *p* v bodě *P*. V tomto bodě se přímky dotýká i kružnice *m* o poloměru r_2, přičemž platí, že $r_1 > r_2$ a *m* leží uvnitř *k* (obr. 24).



Obrázek 24: Kružnice *k, m* dotýkající se přímky *p* v bodě *P*

Úhel, který je tvořen polopřímkou, vycházející z bodu *P,* a obloukem větší kružnice *k*, je nulový. Stejně tak úhel, který svírá menší kružnice *m* a polopřímka, je také nulový. Avšak první zmiňovaný úhel je částí druhého úhlu. I když jsou tedy oba úhly stejné, zrak se nás snaží přesvědčit, že jsou různé.

Podobné je to u Nely. Nela nulu vnímá ve dvou kontextech. V tom klasickém kontextu je nula jen jedna jediná, a když je napsáno 0 = 0 + 0, tak jsou všechny nuly stejné. V dalším jejím kontextu jsou ale nuly na pravé straně rovnice menší než ta jedna na levé straně. Tento případ se týkal též úlohy s lichoběžníkem (obr. 23). V kontextu délek stran lichoběžníku je strana AB delší než strana CD. Avšak v kontextu množinového přiřazení jsou obě tyto úsečky stejné. Určení, jestli jsou objekty stejné, tedy závisí na kontextu. Pro nulu tak Nela vytváří další kontext, v němž se nuly rozdělováním zmenšují.

5.1.3. „Když máme NIC, tak to můžeme rozdělit třeba na sto NIC."

Diskuze o tom, že je možné nulu rozdělit nejen na dvě, ale i více nul, proběhla i před spuštěním záznamu. Dozvuk této diskuze je možné hledat již v prvním vstupu protokolu u Nely (001). Nelin sémantický pohled na nulu ve vstupu 304 byl výsledkem diskuze, která probíhala. Jak ale ukazuje 001, vstupní pohled byl strukturální.

001 Nela: Máš nula. Takže to musí být nula, nula a nula.

Ze vstupu Nely není možné jednoznačně určit, zda měla na mysli rozklad nuly na dvě nuly, tři nuly, anebo něco jiného. Použití slovesa „musí" mluví ve prospěch rozkladu nuly na součet dvou nul. V případě, že by Nela měla na mysli možnost rozkladu nuly na tři nuly, by totiž nejspíše použila jiné spojení, např. „může to být". Sloveso „musí" příliš zdůrazňuje jednoznačnost dané myšlenky a nedává moc prostor pro další možnosti, jak je tomu u rozkladu nuly na tři či více nul.

Vyjádření Nely není přesné, ale domnívám se, že její myšlenka, kterou se snaží sdělit, byla přesnější. Lépe ji jde formulovat takto: *Nula se rovná nula plus nula.* Takže nulu na levé straně rovnosti lze napsat jako součet dvou stejných čísel, a sice nul, na pravé straně rovnosti. Důležité zde je, že ty nuly na pravé straně jsou stejné a náhodou dají i tu nulu na levé straně. Tímto se tento izolovaný model liší od všech ostatních izolovaných modelů generického modelu sudé číslo.

Tento vstup jsem však přesto záměrně zařadila do této části, protože z reakce spolužáků (Emy 003 a Marka 014 – Marek viz dále str. 161) je evidentní, že oni a možná i někdo další ho ale interpretovali jako rozdělování nuly na tři nuly. Ema navíc vyjadřuje, že jí právě ty tři nuly připadají divné. Možná se i v tu chvíli domnívá, že tato skutečnost narušuje tvrzení, že nula je sudá.

003 Ema: To je divný ale.

O možnosti rozdělování nuly na libovolný počet nul mluví také Marek (074).

074 Marek: Na NIC a NIC a NIC a NIC. Můžeš to rozdělit třeba na milion kousků.

Jako příklad Marek uvádí nul milion, jeho slovy milion kousků. Tento počet volí zřejmě proto, že milion je pro něj, stejně tak jako i pro mnohé další, generickým modelem. A zároveň je tak vysoké, že leží na horizontu toho, kam žáci v aritmetice vidí. (Podobný jev byl popsán již u Ondry 202 z DII v části 4.1.)

Představa rozdělování nuly na milion kusů se objevuje také u Lenky (226).

226 Lenka: Pani učitelko, když máme NIC, tak to můžeme rozdělit třeba na sto NIC *(Θ)*, a to jde rozdělit na milion kusů, takže ta *(Θ)* nula je sudá, protože ji můžeme rozdělit na dva kusy, na tři, na čtyři až na milion.

Stejně jako Marek Lenka souhlasí, že se nula rozdělit dá. I když oba mluví o kusech, které vyvolávají spíše dojem konkrétního objektu, nula je již pro ně objektem abstrakce. Lenka používá zároveň slova NIC a nula. Použitím slova NIC zpočátku jejího vstupu se zdá, že vychází více ze své zkušenosti, ale již po druhé pauze přepíná do matematiky, kde se objevují slova nula a sudost. Přičemž skutečnost, že se nula dá rozdělit na dva kusy, podpírá tím, že se nula dá rozdělit i na kusy tři, čtyři až milion kusů. Sice nemluví o stejných kusech, ale jistě v její hlavě tyto kusy stejné jsou.

Další vstupy Lenky 243, 275, 320, 321 byly analyzovány již dříve v 4.4.1., protože Lence najednou začne připadat, že možnost rozdělit nulu i na více stejných částí než jen na dvě rozšiřuje tvrzení, že nula je sudá, i o tvrzení, že je také lichá.

A stejně tak je tomu u Pavla (215). Také poukazuje na rozdělování nuly na více než dvě části.

215 Pavel: Protože to se dá rozdělit, to máš dva, to máš nula a nula, takže k tomu přidáš ještě nulu...

A postupné rozdělování nuly, jak ukazují jeho vstupy 266 a 269 na součet dvou nul, tří nul, čtyř atd. považuje za argument, že nula je lichosudá (více viz dříve v části 4.4.1.).

5.1.4. Jak přesvědčit žáka Matěje

V souvislosti s řešením problému možnosti rozdělování nuly lze v průběhu celé diskuze DI[72] sledovat argumenty žáků z pohledu dvou opozičních stran. Na jedné straně stojí malá skupinka žáků (především Matěj, Andrea a zřejmě i Šimon), kteří nulu chápou čistě sémanticky jako NIC, se kterým nelze nijak zacházet a tedy s ním ani provádět žádné operace. Pohledu Matěje a jeho přívrženců již byly věnovány předchozí části 5.1.1. – 5.1.3.. Na druhé straně proti nim stojí zbytek třídy, který zřejmě již trochu do struktury čísel vidí, a proto se snaží Matěje a další přesvědčit, že nula rozdělovat jde. Na tyto snahy, které probíhaly jak ve strukturální, tak především v sémantické rovině, je zaměřena pozornost v této části.

Rozklad nuly ve struktuře čísel

Následující tabulka ukazuje několik vstupů, které se ve strukturální rovině snaží ukázat nesouhlas s Matějovým pojetím, že nula je NIC, a proto nejde rozdělovat.

110 Marek: To jde. *Reakce na Matěje (109)*: *A nic prostě je NIC. A to NIC, to se nedá dělit. Ale ty by si dokázal rozdělit nulu?*
157 Martina: Ale stejně to můžeš rozdělit...
159 Martina: Že to máš jako jednu, *(Θ)* pak to můžeš rozdělit na dvě NIC, jakoby, chápeš?

Nesouhlas projevuje Marek (110) i Martina (157, 159). Martina (157) říká, že i když nula může být považována za NIC, stejně ji rozdělit můžeme. Slovu nula

[72] Následující text opět vychází z protokolu DI.

se ale Martina vyhýbá a nahrazuje ho ukazovacím zájmenem „to“. Stejně tak je tomu i v jejím vstupu 159. V první části tohoto vstupu se zdá, že se slovu nula vyhýbá záměrně. V druhé části výpovědi pak již používá slovo NIC. Martina zde zřejmě podvědomě cítí, že problém stojí nejen v matematickém faktu, ale také ve slovním uchopení jevu, který matematik označuje slovem nula, ale Matěj slovem NIC. Ve své mluvě se tedy snaží jazykově přizpůsobit Matějovi, aby mu ukázala, že jeho NIC se chová přesně stejně jako nula v matematice. Kdyby zde Martina nebo někdo jiný Matějovi řekl, že NIC je hloupost, protože, když třeba čteme čísla čtyři, tři, dva, jedna, tak pak také neříkáme NIC, ale nula, šlo by o násilný tlak na Matěje. Martina ale takto nepostupuje. Namísto toho použitím jeho slov se ho snaží postupně přesvědčit.

210 Vojta: Takže jakoby nula a nula rovná se nula, takže to musí bejt jakoby, nula se dá rozdělit.

Vojta (210) je další, kdo evidentně nulu vnímá i ve struktuře. První část vstupu „nula a nula rovná se nula“ působí, jako kdyby četl nápis 0 + 0 = 0. Neříká, když sečteme nebo dáme dohromady nulu s nulou, z čehož je patrné, že tuto první část chápe jako koncept, který je i výchozí pro to, co chceme dokázat, tedy že nula se dá rozdělit. O tom, že nula se dá dělit, mluví ve druhé části výpovědi, která je již procesuální, na nulu zde pohlíží manipulativně. Ukazuje tak propojení procesuálního a konceptuálního vidění celé situace.

Hledání sémantické opory pro rozklad nuly

Žáci, kteří nesouhlasili s vyřazením nuly z matematiky, se pokoušeli najít situaci také v běžném životě, na které by rozklad nuly doložili. I když sami již tedy byli schopni o rozkladu nuly uvažovat abstraktně, snažili se v sémantické hladině najít způsob, kterému by Matěj rozuměl a následně ho tak mohl přijmout. Těchto navržených situací bylo hned několik.

<u>Fotbalový zápas za stavu 0:0</u>

008 Vojta: Když máš fotbalovej zápas, je to nula, nula. Je to stejný?

Vojta (008) hledá ve své životní zkušenosti i zkušenosti svých spolužáků takovou situaci, ve které se vyskytne spojení nula a nula. Nachází to u fotbalového zápasu. Jde sice o pokus o sémantizaci, ale ne příliš vhodnou, protože nula a nula je u fotbalového zápasu poměrový vztah a ne součet. Nicméně myšlenka zaujme a třída reaguje vstupy 009 až 015.

009 Ema: Jo je.
010 Vojta: Takže to, takže to můžeš mít *(v hlase je patrná nejistota)*.
011 Andrea: Ale fotbal je... *(v intonaci je jasné projevení nesouhlasu).*
012 Marek: Když se pere nula ... *(dokončení myšlenky v 014).*
013 Andrea: Jako když je...
014 Marek: S nulou, tak jsou, tak jsou dvě a ne tři.
015 Třída: *Ticho (Θ). Smích.*

Ema (009) s Vojtou (008) souhlasí. Zde se ale nedomnívám, že Ema příliš přemýšlí o tom, co Vojta říká. Vnímá jen, že on souhlasí s možností rozdělování nuly, což se shoduje s jejím názorem. Zbytkem Vojtovy výpovědi se již příliš nezabývá. Vojta si ale nedostatků svého vstupu začíná být vědom, a proto i vstup 010 je vysloven s výrazně nižší jistotou v hlase. Zřejmě sám již začíná cítit, že nezvolil úplně vhodný příklad. Fotbalový zápas byl jeho momentální nápad spíše asociačního charakteru, o kterém ihned, jak ho vyslovil, začíná přemýšlet. V jeho hlavě tedy téměř souběžně začne probíhat proces analýzy o tom, co říká. Již první hlubší pohled poukazuje na zádrhel, jak stav zápasu 0:0 převést na problém sudosti nuly. Zjišťuje, že mezi nulami je dvojtečka místo plusu, na kterém chtěl sudost nuly potvrdit.

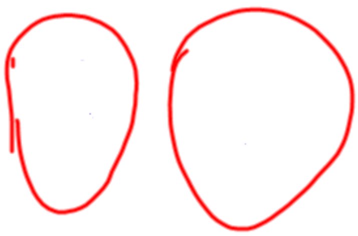
Stejný proces analýzy pravděpodobně proběhl i ve vědomí Andreji (011, 013). Rychlým vstupem Marka (012) však nedostává prostor svou myšlenku zformulovat.

Do mysli Marka (012, 014) najednou vstoupily dva podněty. Prvním z nich je interpretace vstupu Nely (001) jako přítomnost trojice nul v rozkladu $0 = 0 + 0 + 0$. Tato trojice nul se mu však nejeví jako rozumná a možná ho i zmátla. A pak je tu Vojtova myšlenka s fotbalem (008). Ta se mu jednak zalíbila a zároveň s tím i převzal, že nuly jsou jen dvě. Absenci sčítání u tohoto kontextu si neuvědomil. Kromě dvou nul je však v Markově, dalo by se říci, metaforickém vyjádření obsažena ještě jedna dvojka, a to, že jsou na hřišti přítomna dvě mužstva. Marek si pro sebe vizualizuje fotbalový zápas a podstatou tohoto obrazu jsou dvě družstva, a proto i nuly podle něj budou pouze dvě. Podle jeho názoru v definici sudosti nuly jsou ty tři nuly považovány za něco nevhodného, protože uvažuji-li o sudosti nuly, musím mluvit vždy jen o dvou nulách. A právě zdůraznění toho, že o třech nulách nemůže být řeč, Marek nachází ve Vojtově příkladu.

Důkaz toho, že Marek Vojtův poukaz vnímá sémanticky, že ho nestrukturuje, je dobře vidět ve slovech „pere se“. V metaforickém vyjádření „pere se“ poukazuje také na poměr nul u fotbalového zápasu. Místo toho, aby řekl, že u fotbalového zápasu jde o poměr 0:0, vyjádří tento vztah vlastním jazykem, „když se pere nula s nulou“. Když se tedy jedná o poměr dvou nul, tak jsou tam jenom ty dvě nuly.

Po vstupu Marka třída ztichne (015), protože všichni zvažují, co vlastně Marek řekl. Někteří pochopí, co chtěl říci, jiní ne. Ale jeho vyjádření, že „se pere nula s nulou“, je pěkným metaforickým obrazem uchopení situace, kdy namísto fotbalistů dává do souboje nuly. A právě tato metafora se jim zalíbí natolik, že vyvolá smích.

<u>Dva prázdné pytlíky</u>

048 Marek: Takže, jak to dělá návazně vlast *(nedořekne) (Θ)*. Máš dva pytlíky. *Kreslí na tabuli pytlíky:* 
049 Vojta: V žádným není NIC.
050 Marek: V žádným je nula. Ehm. V obou je nula. Mám stejně?

Marek (048) intuitivně vnímá, že sudost nuly je jev strukturální, ale spolužáci, které se snaží přesvědčit, nejsou ochotni akceptovat to, co nelze uchopit. Hledá tedy způsob jak strukturální vazbu 0 = 0 + 0 sémantizovat. Dostane skvělý nápad. Nebude pracovat s číslem, ale s místem pro číslo. Tím místem je pytlík (sémantický objekt), do něhož počet vloží.

Vojta (049) rozumí, co se Marek snaží ostatním sdělit, a souhlasí s ním. Možná také tuší, že tento příklad bude lepší než ten jeho, a chce se proto podílet.

Jak Vojta přesně odhadl, Marek (050) do pytlíků nevkládá žádný předmět, aby tak sémanticky znázornil, co to znamená mít nulu. Ve výroku „v žádným je nula“ se odráží to, co zaslechl od Vojty „v žádným není NIC“. Záměrně však nahrazuje slovo NIC nulou, aby tak svůj příklad více převedl do jazyka matematiky. Vzápětí si ale uvědomuje nedostatečnou negaci Vojtovy věty a upravuje ji na „v obou je nula“.

051 Ondra: Jo.
052 Třída: Jo.
053 Andrea: Nemáš.
054 Třída *(Rozčíleně. Hlavně je slyšet Ema)*: Máš /Má.
055 Andrea: Ale každej pytlík může bejt jinak velkej.
Šum třídy. (Rozhořčené hlasy se snaží Andree protiargumentovat.)

Marek (050) je přesvědčen, že máme-li dva takové prázdné pytlíky, pak je v nich stejně. Souhlasí s ním i Ondra (051) a další hlasy ve třídě (052, 054). Kdo s tím však nesouhlasí je Andrea (053, 055), čímž na sebe upoutá pozornost třídy.

Andrea (053) nápad s pytlíky nepřijímá a zaútočí na něj ne příliš přesvědčivým argumentem (055). V její mysli je asi přesvědčení, že nulový obsah pytlíku je množství, které se nedá porovnávat. Nelze přeci určit, jak velké NIC je. Protože Andrea vnímá nulový počet a stejně tak tento příklad pouze sémanticky, odmítá přijmout, že ve dvou prázdných pytlících je toho stejně.

Rozhořčení třídy, jak si Andrea může myslet z jejich pohledu takovou hloupost, nad rovností 0 = 0 se přeci nedá diskutovat, je tak velké, že plno vstupů zaniká v šumu třídy, jak se každý snaží Andree něco říci.

056 Vojta: Ale furt je pořád prázdnej.
Šum třídy (rozčílení).
057 Marek: Ale Nováková .... (příjmení Andreji)
059 Marek: Ať jsou velký. Můžu mít takovejhle a takovejhle...
062 Marek: Oba jsou sice jinak velký, ale je v obou stejně bonbonů.

Ve změti všech rozčílených hlasů je rozlišitelný pouze Vojta (056) a Marek (057, 059 a 062), kteří se pokoušejí Andreu upozornit na význam velikosti obsahu uvnitř sáčků při jejich porovnávání namísto velikosti jich samotných. Na pytlících (obalu) totiž vůbec nezáleží.

060 Matěj: Ale nic nemám, tak je to vyřešený.
061 Ondra: Ale pořád jsou to pytlíky.
063 Lenka: No.
064 Matěj: Ale vždyť tam žádný bonbon neni.
Šum třídy.
065 Marek: No právě v tom to je, že když mám nula a nula, tak v tom je to stejný.
066 Šimon: Ale jak poznáš, že je to stejný?

Na stranu Andreji se přidávají také Matěj (060, 064) a Šimon (066). Podle Matěje (064) lze počet předmětů porovnávat jen v tom případě, pokud máme alespoň jeden. V opačném případě nemáme co porovnávat. Matěj i Šimon tedy nechápou pytlíky jako příklad v matematice. Když v sáčku není nic, pak to nevidím, nemohu to vzít do ruky, nemohu to zvážit, spočítat anebo jinak porovnat, jak velké je to NIC.

Ondra (061) ale upozorňuje, že i když nic nemáme, tak stejně máme ještě ty pytlíky, i když jsou prázdné. Jakoby nám ty sáčky to NIC ohraničovaly. Sáčky se stávají místem pro nulu. Ve vstupu Marka (065) je patrné opět strukturální vnímání problému 0 = 0.

070 Marek: Na co rozdělíš? *(Θ)* Tady máš jeden pytlík. *(Θ)* Máš nulu. Na co to rozdělíš?

Po otázce Marka (070) následují vstupy (071 – 078), které v případě Andreji a Matěje na jedné straně ukazují již dříve komentovaný názor, že nula jako NIC dělit nelze, a na druhé straně stojí vstupy těch, co spravedlivě dělí do sáčků jednu nulu a druhou nulu.

071 Vojta: Na nula a nula.
072 Andrea: Na NIC *(silná, agresivní intonace),* nula a nula *(najednou výrazná nejistota, která oslabuje sílu hlasu až do té míry, že poslední hlásky zanikají).*
Šum třídy. (Ozývají se slova nula a nic.)
073 Andrea: Na NIC.
074 Marek: Na NIC a NIC a NIC a NIC. Můžeš to rozdělit třeba na milion kousků.
Šum třídy. (Andrea se snaží překřičet Marka i zbytek třídy.)
075 Andrea: Ale nula nejde na vůbec nic rozdělit.
077 Marek: Jde.

Šum třídy. (V pozadí je slyšet Nela, Marek.)
078 Matěj: Ale nula je NIC, NIC, a to přece neexistuje.
Šum třídy.

Ke sporu, který iniciovala Andrea (053, 055), se vrací znovu pak ještě Vojta (083).

083 Vojta: Ale nám totiž jde přeci o ten obsah. *(Θ)* Takže když tam udělám do toho jeden bonbon *(Θ)* a do druhýho nic, tak se to nedá rozdělit.

Vojta si obsahy již dříve zmiňovaných pytlíků představuje jako části celku. Hledá proto možnosti, kdy lze tento celek, tedy určitý počet bonbonů, spravedlivě rozdělit do dvou pytlíků. Podle jeho názoru v obou prázdných pytlících je toho stejně, protože když do jednoho z nich přidám jeden bonbon, už mít stejně nebudu. Jeden bonbon tedy nemohu spravedlivě rozdělit do dvou pytlíků.

086 Vojta: No, pani učitelko, ale tím se zjistí jako, jestli je to to, protože jde o velikost toho pytlíku, pořád je v něm nic a tím pádem je to pořád stejný jako to druhý, takže je to vyrovnaný.
087 Petr: Ale stejně jsou ty pytlíky pořád stejně velký.
204 Vojta: Akorát že v těch pytlíčcích může být třeba šest bonbonů a tadyhle může být taky šest a pořád jich je tam stejnej obsah, jako když tam bylo nula a nula, akorát že, akorát že je to to, to je úplně stejný, akorát že, akorát že ehm, akorát že tam těch bonbonů bude víc, ale pořád je to to stejný, jako by kdyby tam byla nula a nula, jako kdyby tam nebylo nic. *Z tabule:* 

Vojta (086) znovu, ale nepřesně, vyjadřuje, že na velikosti pytlíku nezáleží. Záleží pouze na jeho obsahu. Místo „jde o velikost…“ měl Vojta raději říci „nejde o…“ Možná ale tím slovem „velikost“ myslel obsah pytlíku, ale neuvědomil si, že nepoužívá pro vyjádření vhodné slovo.

Do diskuze také nově vstupuje Petr (087). I když do této chvíle od něj nebyl zaznamenaný žádný vstup, zřejmě po celou dobu diskuzi svých spolužáků sledoval.

Vojtu (204) příklad s pytlíky Marka asi natolik zaujal, že se ho snaží co nejvíce využít. Chce pomocí nich přesvědčit spolužáky o rovnosti 0 = 0. Do původních pytlíků Marka (048) proto vpisuje šestky, aby ukázal, že v každém z nich je šest bonbonů. Když v obou pytlících bude vidět šest, nikdo nebude moci pochybovat, že v nich je stejně. A u nuly je to úplně stejný případ.

Na Vojtu (204) reagují Šimon (205, 207) a Andrea (206), kteří odmítají možnost využití ilustrace pytlíků i pro nulu.

205 Šimon: Jenže to máš jako dvakrát NIC, že jo.
206 Andrea: To máš zrovna dvakrát víc peněz.
207 Šimon: To máš dvakrát nulu.

Pytlíky Vojta (204) považuje za generický model toho, že mám dvě místa pro čísla. Když na tato místa dám stejná čísla, jejich součet je sudé číslo. Do tohoto generického modelu dosazuje také nulu jako model izolovaný, aby bylo možné ukázat, že je sudá. Šimon (205, 207) ale nesouhlasí s tím, aby na místo Vojtou zapsaných šestek v sáčcích, byly zapsány nuly. Podle Šimona tedy není možné každý generický model aplikovat i na nulu. Tato myšlenka má opodstatnění např. v situaci, když napíši $\frac{6}{6} = 1$, protože zde také není možné do rovnosti namísto šestek dosadit nuly.

Andreu (206) možná asociovaly pytlíky představu měšců s penězi. Především však Vojtovi (204) namítá, že pokud dám cokoli dvakrát (například korun), tak se počet zdvojnásobuje, což pro nulu neplatí.

Jako reakci na příklad s pytlíky přináší Šimon (101) již dříve analyzovaný **<u>případ prázdné (vypité) láhve</u>**, jejíž obsah také není možné nějak přelévat. Příklad, který přináší Šimon, je na první pohled variací na pytlíky. Při podrobnějším pohledu jsou však mezi nimi patrné zásadní odlišnosti. V příkladu s pytlíky byly dva pytlíky a do nich se něco vkládalo. Zde je ale láhev jediná a všechen obsah je v ní. Její obsah, v tomto případě objem vody, je kontinuální povahy, který mohu vždy rozdělit (rozlít) na dvě stejné části. V pytlících je obsah diskrétní, a ten se mi pokaždé na dvě stejné části rozdělit nepodaří (tedy ne u lichých počtů).

Vzduch v akváriu

166 Martina: Ale to je jako, když máš vzduch, tak to jako taky neni nic.
168 Martina: A stejně ho rozdělíš. Třeba já nevim, můžeš ho rozdělit ...
169 Andrea: Ale jak můžeš chytit vzduch do ruky?
171 Martina: Že prostě jako mám třeba krabici ňákou skleněnou a tu prostě, v tý mám taky vzduch, že jo, ale pak když nějaký akvárko, a když tam dám hm prostě takovou tu přepážku, nebo co, zavřu to, tak mám prostě vzduch ve dvou, jako že rozdělený.
198 Někdo: To rozdělíš na nulu a nulu.

Martinu ve snaze najít příklad, kterým by NIC šlo uchopit, a tak ho alespoň trochu sémantizovat, napadá vzduch (166). Zřejmě jde o asociaci k Šimonově prázdné láhvi (101). V nedávné době jsme totiž v přírodovědě dělali pokus, kdy si v akváriu naplněném vodou žáci ponořenými skleničkami předávali vzduchovou bublinu jako důkaz existence vzduchu všude a ve všem kolem nás. Byl to pro ně ohromný zážitek. Láhev tedy nikdy nemusíme považovat za prázdnou, protože i když v ní nic není, je v ní alespoň vzduch. A vzduch také nemůžeme běžně vidět, ale přesto víme, že je. Navíc, jak si sami vyzkoušeli, vzduch lze přelévat a tedy i rozdělovat.

I když Andrea (169) stále trvá na svém, že rozdělovat lze jen věci uchopitelné, Martina se jí rozdělováním vzduchu snaží přesvědčit o opaku. Namísto doplnění příkladu láhve volí nový příklad se skleněnou krabicí nebo přesněji akváriem (Martina 171). Zde je možné totiž názorněji ukázat rozdělování prostoru (vzduchu uvnitř) pomocí přepážky. Jestliže NIC je to, co nemůžu nijak uchopit, takovým NIC může být například vzduch. Ten rozdělovat umíme, takže i NIC lze dělit.

5.2. Je nula číslo?

Další otázkou, kterou se žáci v diskuzi (především v DI[73]) zabývali, bylo, jestli je nula číslo. Iniciátorem této otázky byl opět Matěj společně s Andreou a Šimonem, kteří samostatně stojící znak nuly za číslo nepovažovali.

107 Matěj: Ale nula je jakoby NIC.
194 Šimon: Ale sto rozdělíš na padesát a na padesát.
202 Andrea: Ano ale před tou nulou není, *(Θ)* před tím NIC, ani za tím NIC.

Jak ukazují tyto vstupy, slovo „nula" je ve vědomí všech třech žáků propojeno se dvěma různými kontexty. Číslice nula se vyskytuje například v čísle 10, kde má význam znaku a je součástí komplexnějšího znaku. Pokud ale nula stojí samostatně, je oproštěna od strukturální konotace, tak je to NIC. Nula jako počet je NIC, které nepatří do struktury ostatních čísel.

Šimon (194) proto vnímá nulu jen jako číslici, jen jako součást zápisu čísla sto. A sto je možné rozdělit na dvě hromádky po padesáti, zatímco nulový počet podle něj dělit nelze.

Chápání nuly pouze jako číslice velice dobře formuluje Andrea (202). Když například napíšeme číslo 105, stojí před nulou jednička a za nulou pětka. Napíšeme-li ale pouze nulu, není před ní NIC a ani za ní není NIC. Nula je tedy schopna čísla tvořit, ale není schopna existovat sama o sobě. Je škoda, že v diskuzi se neobjevila myšlenka např. 5 - 5 = 0, kde nula stojí sama a má jasný význam.

O podobném jevu v rámci geometrie mluví i Vopěnka (1989) a nazývá jej průvodním jevem. Průvodní jev je to, co provází geometrické objekty, ale samostatně se neukazuje. Jev průvodní tedy přestává existovat v okamžiku, kdy zanikne objekt, kterému je průvodním jevem. Například strana čtverce *AB* je průvodním jevem čtverce *ABCD*, protože smažu-li čtverci *ABCD* všechny strany kromě *AB*, tato strana *AB* přestává být stranou čtverce a stává se jen úsečkou. Pokud toto geometrické vidění propojíme s aritmetikou, pak stejně tak můžeme říci, že nula je průvodním jevem čísla 10. Nula společně s jedničkou vytváří číslo deset. Jakmile ale jedničku z desítky smažu, nula ztratí svou existenci, ztratí svou příslušnost ke struktuře matematiky a stává se z ní NIC.

[73] Následující text opět vychází z protokolu DI. V DII již tomuto problému žáci nevěnovali pozornost.

Proti této malé skupince tří žáků, ale ostatní zachycené vstupy[74] vyjadřují opoziční názor, nula má smysl nejen jako číslice, ale i jako číslo.

142 Marek: Jenomže nula není NIC.
184 Luboš: Nemusí bejt NIC.
187 Ema: No, takže, Matěji, to nemůžeš.[75]
191 Ondra: Je to číslo, takže to NIC neni.[76]
192 Vojta: No, tím pádem nula je taky číslo.[77]
195 Ema: Matěj říkal, že to nula není číslo.
197 Ondra: Ale ono to je číslo.
199 Ema: Nula je právě číslo, ale on říká, že neni.
312 Vojta: Existuje, nula je číslo.
315 Ondra: Je to stejný jako všechny ostatní čísla.[78]

Tyto vybrané vstupy vyjadřují pouze nesouhlas s vyřazením nuly ze struktury čísel. Nela (181, 183, 185) a Amálka (314) se však pokusily najít i argument, kterým by Matěje a další přesvědčili o jejich omylu.

181 Nela: Já jenom, jak tady Matěj říkal, že tady, že si jako myslí, že ta nula je NIC...
183 Nela: Takže když třeba napíšu sto...
185 Nela: Sto. Takže když nula je NIC, tak tím pádem sto je jedna.
314 Amálka: Pani učitelko, ale jako nula existuje, protože může být vyrobená třeba z papíru a nejenom v naší mysli. Může bejt i třeba nakreslená.

Nela (181, 183, 185) se vrací k myšlence významu nuly jako číslice v pozičním zápise čísel, podobně jako tomu bylo u vstupu Marka (036, 044 v DI). Ten ale poukazoval na sudost čísel, pokud mají nulu na místě jednotek. Nela říká, že kdyby nula byla NIC, jak tvrdí Matěj, číslo jako například sto bychom vůbec nemohli zapsat. Sto by bylo to samé jako jedna. Tento případ známe i z historie. Ve Starobabylonské říši též zprvu neměli znak pro nulu, a tak nebylo možné

[74] Do následujícího výběru vstupů z protokolu DI nejsou zařazeny jedno- nebo dvouslovné vstupy vyjadřující pouze souhlas nebo nesouhlas a vstupy v záznamu neurčitelných autorů, které téměř doslovně opakují vstup jiného spolužáka. Jde o vstupy 182, 186, 188, 189, 190, 193, 196.
[75] Ema má na mysli, že nula nemůže být považována za NIC.
[76] Pravděpodobně chtěl říci: „nula je číslo, takže neplatí, že nula je NIC."
[77] Vojta vyjadřuje souhlas s Nelou (185).
[78] K nule je nutné přistupovat jako ke všem ostatním číslům.

ze zápisu přesně rozlišit, zda jde o číslo 61 nebo 3601. Matěj ale nulu v číslech přijímá, odmítá s ní jen pracovat, pokud stojí samostatně.

Amálka (314) se snaží doložit existenci nuly nalezením něčeho hmatatelného (vyrobená z papíru) nebo vizuálně zachytitelného (nakreslená na papíře).

Otázka, jestli je nula číslo spolu s dalšími otázkami, které vyvstaly při řešení problému, jestli je nula sudá, poukazuje na silnou potřebu žáků porozumět pojmům, jevům a souvislostem. Intenzita diskuze tak odpovídá intenzitě této potřeby. V úzkém pohledu jen na matematiku, pouze na splnění téma sudé číslo, může diskuze vypadat jako ztráta času. Žáci však takto dostali příležitost argumentovat, i když často jen v nepřesném a vágním jazyce, a vytvářet si určitou představu o objektu, který je sledován.

5.3. Další otázky vzniklé při řešení problému nuly

V diskuzi DI se žáci chvíli zabývali i problémem, jestli jde nulou dělit. Na několika místech protokolu DI je pak dále také možné sledovat zvažování vztahu nuly a nekonečna. Účelem zde však není podrobně popisovat a analyzovat všechny kontexty, do kterých nula v diskuzi žáků vstupuje, ale poukázat na jejich celkovou bohatost. Z toho důvodu tyto další otázky jsou zde zachyceny jen jako soupis vstupů žáků vztahujících se k těmto problémům vybraných z protokolu DI.

Jde nulou dělit?

277 Šimon: Já bych chtěl říct s tím papírem, to je jako, když říkal, že rozdělit nula děleno nula je nula, tak to je jako rozdělení A-čtyřkový papír na A-čtyřkový a A-čtyřkový papír. To máme jenom jeden. To nejde.
278 Uč.: Takže jde udělat nula děleno nula?
279 Šimon: Ne.
280 Vojta: Ano.
281 Andrea: Nejde.
282 Bořek: Jde.
283 Luboš: Jde.
284 Ondra: Nula děleno nula je nula.
285 Ema: No, dyť jo.
286 Pavel: No právě a to jde.
287 Bořek: Jo.
288 Martina: Mohlo by to bejt...
289 Andrea: Ano, protože se furt...
290 Ondra: Pořád se to něco rovná.
291 Bořek: Jo.
292 Martina: Myslim, že to jde udělat.
293 Andrea: Ale nula děleno nula je NIC.
307 Andrea: Jako, že když uděláme, tu nula děleno nula je prostě NIC, a to NIC je ta nula.

Jaký je vztah mezi nulou, NIC a nekonečnem?

116 Vojta: *(Začátek není rozumět)*, když to není NIC, je to nekonečný číslo. *(Oproti první části věty říká „nekonečný číslo" výrazněji.)*
222 Petr: Nekonečno je taky sudolichý. *(Mluví polohlasně, zřejmě jen na souseda v lavici. Ten odpovídá: „Jo," ale dále není rozumět.)*
250 Šimon: Jako nekonečno se taky nedá rozdělit na nekonečno a nekonečno.
251 Petr: Dá, na *(zbytek není rozumět).*
252 Ema: No.
253 Matěj: Nedá.
268 Bořek: Ale nekonečno je, Pavle, otočená osmička. *Reakce na Pavla (266): Jo. Že nul je nekonečno, takže vlastně to jde popořadě. Jedna nula, dvě nuly, tři nuly, čtyři nuly, a to jsou jako čísla. Takže nula jedna je lichá a potom dvojka je sudá, takže. (Odmlčí se.)*

6. Desémantizace nuly vedená učitelem

Nekorektní představy žáků staví před učitele náročný didaktický úkol, a to najít úlohy, jejichž řešením žáci odhalí vlastní chybu a dojdou k správné představě. Někdy se stane, že postupem času žáci svou chybu objeví sami bez zásahu učitele buď porovnáváním svých představ s představami svých spolužáků v diskuzi s nimi, anebo náhodou při řešení jiných úloh, které ani za tímto účelem nebyly připravovány (jako tomu bylo např. u úlohy se směrovou růžicí v DII, která žáky přiměla k další diskuzi a přijetí sudosti nuly, aniž to byl původní učitelův záměr). Ne vždy se to však takto podaří, a proto je pak na učiteli, aby se pokusil nějaké takové úlohy připravit.

Za největší problém, který zůstal v diskuzích (DI a DII) nedořešen, považuji to, že někteří žáci nepřijali nulu ve struktuře čísel, ale naopak ji z ní vyřadili. Otázky z DI, zda jde nula rozdělovat a jestli je nula číslo, zůstaly otevřené, protože několik žáků setrvalo ve svých chybných představách. Nula u nich zůstala v sémantické rovině chápaná pouze jako NIC. Ani později v DII nedošlo k vyřešení tohoto problému (žáci se věnovali především vyvrácení tvrzení, že nula je sudolichá). Na základě provedených analýz je zde proto předloženo několik návrhů, jimiž by bylo možné pomoci žákovi jeho představy desémantizovat pro případ, kdybych někdy v budoucnu ve své třídě řešila stejný nebo podobný didaktický problém. Inspirace jsem při tom čerpala z nápadů samotných žáků, tak jak zazněly v diskuzích DI a DII.

Seznam myšlenek žáků využitelných pro konstrukci úloh napomáhajících desémantizaci nuly

Nápady žáků jsou rozděleny do dvou skupin podle toho, v jaké diskuzi zazněly. Jejich uspořádání odpovídá jejich metakognitivnímu chápání – od manipulativního umísťování předmětů do pytlíků a zdánlivě nemanipulativního rozdělování obsahu prázdné láhve (vzduchu), přes vizuálně evidovatelné adresy čísel na číselné ose až ke strukturálně konkrétnímu vnímání číslice nuly na konci čísel a abstraktní struktuře celých čísel.

z diskuze DI

a) bonbony ve dvou pytlících - i manipulativně lze nulu rozdělit na dvě nuly
b) prázdná láhev, vzduch[79] - zdánlivě nerozdělitelné NIC lze spravedlivě dělit
c) číselná osa - pozice nuly v rytmu sudých čísel
d) číslice nula na konci sudých čísel - i číslice nula je číslo
e) aditivní struktura sudých čísel - abstraktní představa

z diskuze DII

f) situace „směrová růžice“ jako podnět k myšlence aritmetické posloupnosti s diferencí 4 - kumulace sudých čísel na severu růžice
g) aritmetická posloupnost s diferencí 5 – rytmus posloupnosti čísel u severního vrcholu růžice stejný jako u číselné osy
h) aditivní struktura sudých a lichých čísel - odhalení aditivní grupy $\mathbf{Z}_2$[80]
i) multiplikativní struktura sudých a lichých čísel - hluboká myšlenka rozšířit grupu $(\mathbf{Z}_2, +)$ na okruh $(\mathbf{Z}_2, +, \cdot)$

Analýze nápadů žáků byly věnovány předchozí kapitoly. Další rozpracování těchto myšlenek je pak dále v rámci jednotlivých úrovní návrhů úloh.

Tyto návrhy postupu k desémantizaci nuly jsou vždy směřovány na hypotetického žáka Martina. Martin je reprezentantem skupiny žáků, kteří nulu nepřijali do struktury čísel. Za mluvčího této skupiny považuji Matěje, ale dále je k nim nutné počítat Andreu, zřejmě Šimona a možná i některé další žáky, kteří před třídou svůj názor nevyslovili. Přesvědčit žáka Martina tedy znamená přesvědčit všechny tyto jednotlivé žáky.

Při konstrukci návrhů, jak na Martina působit, si proto vždy pokládám otázku, jak by Martin nejspíše protiargumentoval. Přičemž veškeré zachycené vstupy Matěje, Andreji a Šimona jsou kumulovány do předpokládaných vstupů Martina. Na rozdíl však od reálných žáků, které reprezentuje, jeho vstupy neobsahují žádné jazykové nepřesnosti (jako např. chybnou formulaci dobré myšlenky apod.)

[79] Myšlenku prázdné láhve a z toho vyplývající nápad s připodobněním nuly (tedy NIC) ke vzduchu v návrhu úloh nevyužívám. Přesto se mi ale tento nápad velice líbí. Jak je vidět u vzduchu, vždy neplatí, že co nemohu uchopit, nemohu rozdělit. Vzduch stejně jako NIC nemohu vzít do rukou, ani ho nevidím a přesto vložením příčky do prostoru akvária, mohu vzduch rozdělovat.

[80] Jedná se o množinu $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ s operací $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$.

6.1. Charakteristika překážky, která brání žáku Martinovi přijmout nulu ve struktuře, a její analýza

Žák Martin odmítá přijmout sudost nuly. Sudost chápe jako proces rozdělování na dvě stejná čísla a nulu jako NIC. Rozdělování tedy představuje manipulativní činnost. Jenže s NIC žádnou činnost dělat nelze, proto ho nejde ani rozdělovat, a tudíž nulu není možné přiřadit k sudým číslům.

Když prvňáci sčítají 1 + 2 = 3, tak každý tento znak má pro ně sémantické ukotvení. Představí si například 1 jablko a 2 jablka a znak plus jako pokyn dát dohromady. A výsledný znak 3 má v sobě ukryto počítání jedna, dva, tři a tedy dohromady máme 3 jablka. V okamžiku, kdy se však ptáme, kolik je 2 + 0, znak nuly sémantické ukotvení nemá. Pokyn, přidej nic, zní pro dítě divně. Běžně většinou neříkáme, že babička má dva vnuky a nula vnuček. Informace o vnučkách by v tomto případě byla nadbytečná.

Stejně tak situaci, že v autobusu jedou 3 ženy a 4 muži mohu zapsat jako ∆∆∆ □□□□, kdy znak ∆ představuje ženy a znak □ muže. Případ, že v autobuse nejede žádná žena, pouze dva muži, zapíši jako □□. Znak nuly zde nepotřebuji, protože ze zápisu je vše jasné. Pokud však budu chtít uchopit tuto situaci ve formalizovaném jazyce matematiky, první případ zapíši jako (3, 4). Přičemž první číslo dvojice představuje počet žen a druhé číslo počet mužů. Ve druhém případě, kdy jedou pouze dva muži, se již ale bez nuly neobejdu, protože musím napsat (0, 2). Bez použití znaku nula by nebylo zcela jasné, zda v autobusu nejsou ženy nebo muži. Nula zapsaná na prvním místě totiž značí nepřítomnost žen, ale na druhém místě nepřítomnost mužů. Když pak dále pracuji pouze s uspořádanou dvojicí, např. (0, 0), a není k tomu již přiřazeno sémantické ukotvení (ženy, muži), mohou tyto nuly znamenat zcela jinou situaci např. náklaďák vezoucí pytle s cementem a pytle s pískem. Matematický model tedy zůstává stejný, jen role nuly se změní (z lidí na pytle). Přechodem k čistě matematickému zápisu se sémantizace vytrácí a právě toto vytrácení sémantického kontextu Martin u nuly odmítá.

Otázka, jestli je nula žen nebo nula mužů to samé, je provokující. Cílem této provokující otázky je dovést žáky k přesvědčení, že po desémantizaci je každá nula stejná. Jak ale ukazuje příklad s autobusem, můžeme mít nulu ve strukturálním kontextu, ale pak jedna nula a druhá nula mohou být různé. Když vezmeme číslo 1010, tak to jsou také dvě nuly. Samy o sobě jsou ty nuly stejné, ale v kontextu čísla

1010 stejné nejsou, protože jedna určuje jednotky a druhá stovky. Záleží tedy na strukturálním kontextu, kde ta nula stojí. Oba tyto příklady (autobus, číslo 1010) tak mohou posloužit jako impulsy pro diskuzi žáků, jestli nula žen a nula mužů je totéž.

Při analýze žákovských výpovědích o nule je tedy potřeba zkoumat, v jakých kontextech žák nulu vnímá. Do jaké míry je nula pro něj sémantické NIC a do jaké míry je objektem strukturálním. Martin v naší diskuzi nulu dává do struktury v kombinaci s dalšími čísly, například když píše číslo 10. Ve struktuře ji má ale také uloženou, když vidí napsané např. zadání 0 + 2 = ?. V tomto případě nulu chápe jako desémantizovanou, a proto automaticky napíše, rovná se 2, aniž by o tom nějak dále přemýšlel. Kdyby měl však posoudit, zda 2 = 0 + 2, byl by pravděpodobně v době DI na rozpacích. Když se mluví o procesu rozdělování, o sudosti a lichosti, tak v těchto kontextech u něj ještě k desémantizaci nuly nedošlo, a proto proti nule vznáší námitky.

Pro první případ (0 + 2 = ?) si lze představit sémantický podklad např. mám nula hrušek a dvě jablka, kolik mám kusů ovoce. Ve druhém případě (2 = 0 + 2) bych ale měla dva kusy ovoce a rozdělovala bych je na dvě jablka a nula hrušek, což zní nesmyslně, protože stejně tak by to mohlo být i nula švestek nebo nula třešní a vůbec nic by se nezměnilo. Celá situace bude působit ještě nesmyslněji, když půjde o nulu jablek a nulu hrušek. Na otázku, kolik kusů ovoce je nula jablek a nula hrušek, tedy kolik je 0 + 0, by Martin jistě bez váhání odpověděl, že nula. Ale otázka, jestli lze napsat 0 = 0 + 0, by ho pravděpodobně zaskočila. Došlo by tak v jeho vědomí ke střetu dvou odlišných světů.

V mysli Martina tedy koexistují dva kontexty pro znak 0. Sémantický kontext, ve kterém je tomuto symbolu přiřčena prázdná množina a ve kterém je reprezentován pojmem NIC. A dále strukturální kontext, v němž se tento objekt vyskytuje, buď v zápisu čísla 1010, nebo v úlohách typu 0 + 2 = ? . Stejný objekt tak může být v hlavě dítěte uložen jako sémantický ale i jako desémantizovaný (strukturální).

U Martina je strukturální nula desémantizovaná a jev sudosti je silně sémantizovaný, a proto jsou tyto dva objekty (tedy NIC a sémantizovaný jev sudosti) ve vědomí Martina neslučitelné. Jde tedy o to najít cestu, kterou by mohl učitel žáka dále vést, aby došlo k sladění těchto dvou světů. Výsledkem této snahy je sestavení několika následujících úrovní postupu směrem k přijetí nuly ve struktuře.

6.2. Úrovně desémantizace nuly v souvislosti s jevem sudosti

Jak ukazují další zkušenosti, odmítání nebo neschopnost strukturovat sémantickou představu není ojedinělý jev. Propast mezi sémantickým a strukturálním vnímáním problému se vyskytuje v každém věku. V předškolním nebo mladším školním věku jej lze zaznamenat např. v souvislosti s chybějící představou o záporných číslech. Tuto zkušenost zachycuje asi dvou minutový rozhovor maminky Jany se svou pět a půl letou dcerou Elou z února 2015.

Následující záznam je pouze technicky upraven z toho, co mi maminka Jana zaslala. Maminka byla dopředu instruována, že si má veškeré dceřino počínání nechat vysvětlit. Na výzvu též dceři poskytla fazole pro případnou oporu při počítání. Fazole však Ela během experimentu nevyužila. V rozhovoru jsou Ele položeny 3 otázky M1, M3, M6. Písmenem M jsou označeny vstupy maminky, písmenem E vstupy dcery Ely.

<u>Záznam</u>

M1: Dokázala bys mi říct, kolik je dva plus tři?

E1: Takže tři a dva. Nech mě prosím přemýšlet. Pět.

M2: A jak jsi na to přišla?

E2: Dala jsem si prstíky a na ty skrčený jsem si ťukla.

M3: Věděla bys, kolik je pět mínus tři?

E3: Takže pět a tři?

M4: Ne. Máš pět bonbonů a tři ti vezmu. Kolik ti jich zůstane?

E4: Dvě *(ihned odpověděla)*.

M5: Proč? *(Opět vysvětlila na prstech.)*

M6: A co takhle dva mínus tři?

E5: To fakt nechápu. Tak tam jeden přidám? *(Komentář maminky: Příklad dva mínus tři nemohla pochopit. Chtěla, abych jí ještě jeden přidala, protože to nejde mít dva bonbony a dát někomu tři. Byla z toho dost naštvaná. Proto „to fakt nechápu“.)*

<u>Analýza záznamu</u>

Jak ukazuje vstup E1, Ela rozumí operaci sčítání a slovo „plus“ si překládá jako „a“. Zároveň je jí též jasná komutativita sčítání, protože si sčítance ze zadání prohazuje a začíná tím větším. O poměrně dobré matematické schopnosti dívky úměrně jejímu věku svědčí i to, že zadaný součet dva plus tři nepotřebuje sémantizovat. Nepotřebuje vědět, jestli jde o jablíčka, panenky, fazole atd., ale rovnou používá prsty jako generický model. Ze vstupu E2 je pak patrná i silná jazyková vyspělost dívky, protože je schopna vyjadřovat své myšlenky. Navíc mluví i velmi kultivovaně („Nech mě prosím přemýšlet“ v E1).

Mínus Ela nezná. O otázkách ale přemýšlí, a proto v E3 vyjadřuje pochybnost, jestli úlohu chápe dobře. Maminka ji proto v E4 úlohu sémantizuje. Ela ihned odčítání pochopí. Odpověď dává vzápětí, protože nad výsledkem nemusí přemýšlet. Uvědomuje si, že jde o stejnou triádu jako v prvním případě.

I ve třetí otázce M6 zaznívá mínus, které slyšela před malou chvílí. Po prvním vysvětlení operace odčítání pomocí izolovaného modelu bonbonů, bere dívka tento model jako generický. Ve své mysli proto okamžitě transformuje úlohu dva mínus tři na mám dva bonbony a z toho mám vzít tři. Touto transformací si je natolik jistá, že i když objeví, že výsledek je nějaký divný, neptá se, zda ji provedla správně. Namísto toho chce jednu přidat, aby to mohlo vyjít. Problém tedy kvantitativně dešifruje velice dobře, jen pro ní ještě záporná čísla neexistují. V tomto případě pro ni tedy úloha nemá smysl, tak jako pro Martina možnost rozdělovat nulu.

K podobné mimoběžnosti sémantického a strukturálního chápání problému dále dochází i u mnohem starších žáků, např. na gymnáziu při zavádění komplexních čísel. Jak popisuje Hejný (1990), žáci si často pokládají otázku, proč se mají komplexní čísla učit a co to vlastně je to „*i*“, tak jako tomu bylo i u žáka Mira z jednoho bratislavského gymnázia. Miro, nejlepší matematik ve třídě, proti komplexnímu číslu ostře vystoupil:

> „Ja tomu neverím, to je všetko dáky podvod! Čo je to za číslo? Kol´ko je to *1 + i*? Čo ním odmeriam? Kde ho uvidím? [...] Keď se ma niekto opýtá, čo je to tri, ukážem mu tri prsty. Dve pätiny môžem znázorniť ako istú časť torty. Odmocninu z dvoch vidím na štvorci ako uhlopriečku. Záporné číslo si predstavím ako dlžobu. Ale čo je to “*i*”? (Hejný, 1990, s. 457).

I když je Miro z uvedeného příběhu v matematice na zcela jiné úrovni než Martin v mé třídě, stejně je v jejich přístupu možné sledovat paralelu. Oba totiž odmítají strukturální výklad a dožadují se sémantického ukotvení objektu (Martin pojmu nula v souvislosti se sudostí a Miro znaku „*i*“).

Miro vychází z trojice přesvědčení:

a) Číslo má nárok na existenci, jestliže je možné ukázat, co znázorňuje. Pod číslem tedy chápe znázorňování veličinou.

b) „*i*“ jako znak označující nějaké číslo, nepředstavuje vůbec nic.

c) S „*i*“ proto nelze pracovat.

Analogická tři přesvědčení lze přiřknout i Martinovi:

a) Počet je sudý, jestliže jej lze rozdělit na dvě stejně početné části.

b) Nula jako slovo udávající počet označuje NIC.

c) NIC dělit nelze.

Uvedené tři výpovědi mapují výchozí didaktickou situaci, ke které přistupuje učitel při následném promýšlení kroků postupné desémantizace Martinovy představy. Tento výchozí stav je dále přiblížen v úrovni 1, z níž pak dále vyplývají další úrovně (úroveň 2 až 4).

6.2.1. Úroveň 1: výchozí stav

Úroveň 1 ukazuje nejen, jak žák problém vnímá, ale i co je již ochoten přijmout. Na základě těchto informací (zmapování výchozího stavu) je pak naformulováno několik dílčích cílů, které považuji za významné pro další působení na žáka. Předpokládám, že naplněním těchto cílů by mělo u Martina dojít k postupnému přijetí sudosti nuly i její zapojení do struktury ostatních čísel.

Jak již bylo řečeno dříve, to jestli je Martin ochoten nulu přijmout jako objekt struktury závisí především na kontextu, ale i na momentálním naladění Martinovy psychiky. Číslici 0 již považuje za součást struktury v případě, že spolu s jinými číslicemi tvoří víceciferná čísla jako např. 10, 105, 1050 atd. Stejně tak bude s nulou bez zaváhání pracovat v úlohách typu 5 + 0 = ?, které již jistě mnohokrát doplnil spolu s dalšími takovými úlohami psanými ve sloupečcích. Dále Martin znak 0 užije při práci s číselnou osou na označení adresy. Geometrická interpretace bodu je u nuly stejná jako u ostatních čísel, ale adresa 0 může být vnímána jen jako hranice mezi kladnými a zápornými čísly, nikoli jako plnohodnotné číslo ve struktuře ostatních čísel.

Pro Martina jsou sudá čísla pouze ta, která lze rozdělit na dvě stejná čísla. Takto je Martin ochoten pracovat se všemi sudými čísly kromě nuly, protože NIC rozdělit nejde.

Dílčí cíle a jim odpovídající navržené úrovně desémantizace

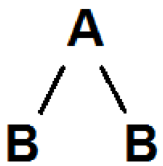
Cíl 1 Rozšířit vymezení sudosti čísla z „sudé číslo je to, které lze rozdělit na dvě stejná čísla“ o „*sudé číslo je to, které lze napsat jako součet dvou stejných čísel*“.
(viz úroveň 2)

Cíl 2 Využít kontextů, v nichž Martin nulu ve struktuře přijímá, tak, aby začal odhalovat nedostatky svého původního přesvědčení.
(viz úroveň 3)

Cíl 3 Nabídnout ještě i další kontexty, v nichž se s nulou a sudostí bude pracovat.
(viz úroveň 4)

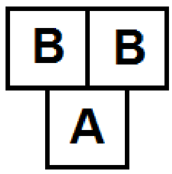
6.2.2. Úroveň 2: sudé číslo jako součet dvou stejných čísel

Martin souhlasí s tím, že číslo A je sudé, pokud ∃ B, kdy A = B + B, a použitím slova rozdělit se navozuje představa celku, se kterým se má něco udělat. Pro Martina je operace rozdělit zřejmě propojena s grafickým znázorněním pomocí tzv. vidliček (viz obr. 25 a dříve 22 b).



Obrázek 25: Grafické znázornění rozdělení čísla pomocí vidliček

Pokud však tento celek nedovoluje požadovanou činnost provést (např. tři bonbony podělit spravedlivě mezi dvě děti, krájet NIC atd.), tak jsme v koncích, a z toho vychází i Martin. S NIC jako celkem lze operovat těžko. Pro přijetí sudosti nuly je proto klíčové změnit operaci rozdělování v opačný proces, a to skládání. Chceme, aby za sudé číslo bylo považováno i to číslo, které dostaneme skládáním dvou stejně početných skupin, tedy číslo A je sudé ⇒ ∃ B tak, že B + B = A. Nyní pro grafické znázornění poslouží např. sčítací trojúhelník (obr. 26), který vizuálně představuje jinou figuru než rozdělování pomocí vidliček.



Obrázek 26: Grafické znázornění součtu čísel pomocí součtového trojúhelníku

Využitím představy skládání se tak změní pozice NIC z celku na prvek, kdy spojením dvou stejných NIC vznikne nový celek, kterým je výsledné NIC. Předpokládám, že Martin bude souhlasit s tím, že B + B = A i pro B = 0. Je však otázka, jestli bude souhlasit, že i A = B + B pro A = 0.

Operace dát dohromady je inverzní k operaci rozdělit. Jestliže tedy platí B + B = A, pak i A = B + B. Dalo by se proto předpokládat, že pokud Martin akceptuje vztah 0 + 0 = 0, přijme i, že 0 = 0 + 0. Zde však není jisté, do jaké míry má Martin zafixovánu stejnost rovností X = Y a Y = X (rovnítko je relace symetrická). V běžném životě totiž tato záměnnost neplatí. V jazyce, kde se pro znak = používá slovo „je“ je tato logická figura narušena. Jiný význam mají například věty „Vojta je můj syn.“ a „Můj syn je Vojta.“. První věta je pravdivá, ale ve druhém případě pravdivá nebude, pokud budu mít ještě dalšího syna. Zmiňovaná záměnnost rovností však vždy není samozřejmá ani v matematice. Tak je tomu například při dělení se zbytkem. Vydělením čísla pět třemi, dostanu zbytek dva. Zbytek dva a dělitel tři však nevedou pouze k dělenci pět.

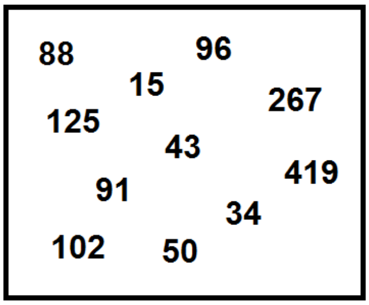
Pro konkrétní aplikaci těchto úvah ve třídě prozatím ale postačí soustředit pozornost jen na přijetí vymezení sudosti jako součtu dvou stejných čísel, jak si klade cíl 1. Touto cestou se ubírá příklad žáků se dvěma pytlíky. Do každého pytlíku vkládám nějaké množství objektů např. bonbonů, a pokud je objektů v obou pytlících stejně, pak je celkový počet těchto objektů sudý. Ilustraci skládání stejných čísel pomocí pytlíků považuji za velice dobrou. Jsem přesvědčena, že Martin pomocí dávání stejných čísel (počtů objektů) do dvou pytlíků přijme, že součet těchto čísel v obou pytlících je sudý. Přijme tím tak i, že sudé číslo můžeme získat také součtem stejných čísel. Přesto však podle mého stále nebude souhlasit s tím, že stejným způsobem můžeme vložit do pytlíků dvě nuly. Pravděpodobně bude tvrdit, že NIC se nedá do pytlíku dát, a i kdyby, tak nemůžeme porovnat, jak velká jsou ta NIC, a tedy ani, jestli jsou stejně velká.

6.2.3. Úroveň 3: využití kontextů, v nichž je nula již ve struktuře uložena

Úroveň 3 a dále i pak úroveň 4 přinášejí série kontextů, ve kterých je nula součástí struktury čísel. Při seznamování Martina s těmito různými kontexty však nejde o naléhání, aby převzal předkládanou pravdu, ale aby začal uvažovat nad svým přístupem. Je možné, že proti všem předkládaným návrhům najde nějaký protiargument, proč pro nulu nemohou platit. Vždy však půjde o snahu vytvářet pro nulu další a další výjimky ve smyslu, že teď to sice platí, ale jindy ne. Záměrem následujících podnětů pro další práci s nulou je proto postavit proti tvrzení, že nulou nelze dělit, které mluví o výjimečnosti nuly, řadu dalších tvrzení, ve kterých již ale výjimečnost nuly není. Jde tedy o to, aby si Martin postupně začal uvědomovat, že vyřazení nuly z tezí, které platí pro všechna čísla, působí nepřirozeně. A zároveň tak i postupně začal váhat, jestli je skutečně nějaký rozdíl mezi sémantickým NIC a nulou, o čemž je zatím přesvědčen.

3a) nula na konci sudých čísel

Martin znak 0 přijímá jako součást víceciferných čísel. Jak již bylo zmíněno, nulu tedy používá při zápisu čísel. O čem už ale Martin zřejmě neuvažuje je, že nula je jedním z pěti sudých čísel, které v roli číslic na místě jednotek u víceciferných čísel tvoří sudost tohoto čísla. Nechám proto Martina vyřešit následující sérii úloh.



Obrázek 27: Galerie sudých a lichých čísel pro sérii úloh.

1. V galerii čísel vybarvi všechna čísla sudá.
2. Doplň alespoň 10 dalších sudých čísel, která v galerii ještě nejsou a která budou zakončená jinými číslicemi, než obsahují čísla uvedená v galerii.
3. Co si zjistil? Jde na první pohled určit, zda je číslo sudé?
4. Vypiš všechny číslice, které stojí na místě jednotek u sudých čísel[81].
5. Co lze o těchto číslech říci? Která z těchto čísel jsou sudá?

[81] Vypsáním se číslice 2, 4, 6, 8, 0 stávají i čísly.

Při postupném řešení těchto úloh Martin nejprve vybere sudá čísla. Možná bude všechna čísla v galerii zkoušet rozdělovat na dvě stejná čísla. Pokud číslo půjde rozdělit na dvě stejná čísla, označí jej jako číslo sudé. Zřejmě již ale rovnou bude sledovat číslice na místě jednotek. V tomto případě pak bude pro něj snadnější řešení úlohy 2, jejímž cílem je žákovo odhalení, že sudá čísla jsou ta, která jsou zakončená číslicemi 0, 2, 4, 6, 8. Z toho důvodu doplnit další sudá čísla nelze, protože jich je možné nalézt pouze pět. Záměrem třetí otázky je ukázat nulu jako právoplatného člena skupiny číslic, které tvoří sudost. A poslední úkol směřuje k uvědomění si, že jelikož vypsané číslice 0, 2, 4, 6, 8 jsou i čísly, nula zde stojí mezi samými sudými čísly. Proč by tedy nula jako zbylá tato čísla neměla být sudá?

<u>3b) využití aditivní triády 5 + 0 = 5</u>

Znak 0 Martin přijímá jako součást víceciferných čísel, ale také samostatně např. ve vztahu 5 + 0 = 5. Uvedený vztah lze sémantizovat pomocí velice jednoduché situace, např.: V kasičce mám pět korun. Jestliže k tomu přidám NIC, budu mít stále pět korun. Odsouhlasením pravdivosti této situace, se žák dostává k přijetí idiomu přidat NIC a tedy i skutečnosti, že s nulou jako s prvkem mohu něco dělat, mohu ji přidávat. Dochází tak k propojení nuly se znaménkem plus, které již patří do jazyka aritmetiky, a navíc k vyvrácení přesvědčení, že s nulou nelze nic dělat. Podobně lze i sémantizovat rozdíl 5 – 0 = 5. Např. mám pět a korun, nic jsem neutratil, a tak mám stále pět korun. I v běžném životě tedy používáme spíše spojení „nic jsem neutratil“ namísto „utratil jsem nula“.

Operaci přidávání NIC ale mohu i opakovat. Mám-li v kasičce pět korun, přidám k nim NIC a znovu přidám NIC, budu mít stále původních pět korun. Je tedy jedno, kolikrát to NIC přidám, protože na výchozím stavu se nic nemění. Tuto situaci mohu zapsat jako 5 + 0 + 0 = 5.

Pokud toto Martin přijme, zeptám se ještě, kolik bylo celkově do kasičky přidáno. Pokud jsem poprvé přidala NIC a podruhé jsem přidala NIC, tak i celkově jsem přidala NIC. Místo 0 + 0 mohu tedy napsat jen 0. V tuto chvíli již nepředpokládám, že by Martin něco namítal proti zápisu 0 + 0 = 0. Tento zápis se pro něj v tuto chvíli stává korektní jak sémanticky, tak strukturálně.

A pokud v úrovni 2 Martin přijal vymezení sudosti jako součet dvou stejných čísel, pak by již zde i se sudostí nuly měl souhlasit. Pro případ nějakých dalších pochybností by pak mohlo pomoci ještě využití číselné osy (3c) a případně pak i další podněty v úrovni 4.

3c) využití číselné osy

Jako další dobrý způsob, který může posloužit pro přijetí sudosti nuly je číselná osa. Číselná osa představuje jakýsi most mezi sémantikou a strukturou. Nula je hranicí mezi kladnými a zápornými čísly a zároveň je při chůzi na číselné ose jejím nejčastějším východiskem pro pohyby. Při barevném odlišení sudých a lichých čísel je vidět rytmus v jejich pravidelném střídání. Nula přitom svou pozicí zapadá do rytmu sudých čísel *4, 2, 0, -2, -4*

Proti argumentu číselné osy se Martin v diskuzi nevyjadřuje. Příčinou může být, že pohyby po číselné ose mají procesuální charakter, zatímco jeho vnímání NIC je konceptuální. Oba dva tyto kontexty jsou v jeho vědomí odděleny, a proto nemá pocit, že by rytmus na číselné ose nějak vyvracel jeho statickou představu o NIC.

To, že mu zatím propojenost těchto dvou kontextů nedochází, však není podstatné. Důležité je, že eviduje existenci takové situace jakou je např. číselná osa a tyto zkušenosti na něj pak budou dále působit. Postupem času tak možná začne sám vnímat konflikt mezi číselnou osou a NIC.

6.2.4. Úroveň 4: další strukturální kontexty nuly

4a) strukturální vazby sudých a lichých čísel

Na základě podnětu žáků jsem sestavila další kroky k odhalení sudosti nuly, které vedou přes aditivní a multiplikativní strukturu sudých čísel. Přesto si ale myslím, že tyto úlohy nebudou pro Martina přesvědčivé, protože jsou na příliš abstraktní úrovni. Žáci, u nichž se abstraktní myšlení teprve rozvíjí, myšlenku evidují, ale ještě v ní nevidí argumentaci. Je však dobré, když Martin alespoň pozná, že tyto úlohy jsou, a v budoucnu bude moci těchto zkušeností využít.

V zamýšleném postupu, jak otevřít Martinovi sudost nuly, budu nejprve chtít vědět, jestli platí, že sudé číslo plus sudé číslo je číslo sudé? Kontrolou na několika izolovaných modelech bude jistě Martin souhlasit. Když se ho ale zeptám, zda jako izolovaný model mohu použít i nulu, zřejmě namítne, že nula není sudá.

Přejdu tedy k rozdílu sudých čísel. Opět po několikerém ověření dosazením různých čísel dojde Martin k odsouhlasení, že také sudé číslo mínus sudé číslo, je číslo sudé. Vyzvu ho proto (pokud to již neudělal sám), aby do vztahu vložil jako izolovaný model i číslo 2, tedy 2 – 2 = 0. I z této situace vychází, že nula je sudá.

Dále mohu pracovat i s aditivní strukturou sudých a lichých čísel. Tvrzení přičtu-li k sudému číslu číslo sudé, dostanu číslo sudé, je již odsouhlaseno z předchozího. Hledám tedy, co se stane, když přičtu k sudému číslu číslo liché. V tomto případě vyjde číslo liché. Do těchto dvou výroků se nyní pokusím dosadit nulu. Nechám tedy Martina zkusit, co se stane, když k nule přičítám různá sudá čísla. Po zjištění, že výsledek je vždy číslo sudé, nyní chci, aby zkoušel přičítat čísla lichá. Tentokrát je již výsledek lichý. Nula se tedy v těchto souvislostech chová jako číslo sudé.

Stejným způsobem mohu postupovat také násobením nuly se sudými čísly a násobením nuly s lichými čísly. V obou případech je součin nula. A vzhledem k tomu, že součin sudých čísel a součin sudého a lichého čísla je vždy sudý, nula se zde opět chová jako číslo sudé.

<u>4b) nula jako součást aritmetické posloupnosti</u>

Nulu lze též sledovat např. v aritmetické posloupnosti s diferencí 4, jejímž prvním číslem je právě nula. Pro práci s touto aritmetickou posloupností lze využít čtyřcípá směrová růžice, kolem jejíchž vrcholů jsou ve směru hodinových ručiček postupně od severu zapisována čísla po jedné od nuly. Na severu se tímto postupem objeví hledaná posloupnost čísel zvyšujících se o čtyři a počínající nulou. Všechna tato čísla na severu jsou sudá. Nula tedy náleží skupině sudých čísel.

Sudost nuly i její pevné místo mezi ostatními čísly se ukáže, i když zvýšíme počet vrcholů růžice na pět vrcholů a stejným způsobem kolem nich zapíšeme čísla. Tentokrát na severu růžice vznikne aritmetická posloupnost s diferencí pět a také s prvním členem nula. V této posloupnosti čísel nula stojí v pravidelném střídání sudých a lichých čísel na pozici sudých čísel.

V těchto modifikacích je možné pokračovat i dále. Pokud růžice bude mít sudý počet vrcholů, nula bude stát na severu mezi samými sudými čísly. V případě lichého počtu vrcholů růžice bude nula v rytmu sudých a lichých čísel vždy na pozici sudého čísla. Z toho je patrné, že je nula nejen součástí těchto vytvořených posloupností čísel, ale že je ve všech případech sudá.

6.3. Proces desémantizace u žáků

Při sestavování jednotlivých úrovní jsem reakce Martina zvažovala především vzhledem k jeho možným protiargumentům odpovídajícím jeho výchozí úrovni poznání. Kdybych měla možnost žákům (zahrnutým pod žáka Martina) předložit navržené úlohy, možná by již po chvíli odhalili, jak se mýlili. Možná by však ani všechny mé návrhy nestačily, aby pravdu všichni odhalili. Avšak pochybnosti vzniklé při řešení předložených úkolů mohou s odstupem času přispět k přehodnocení původního přesvědčení. Čas si myslím zde hraje svou roli. Plnění navržených problémových úloh proto není zamýšleno na jednu vyučovací jednotku, ale mělo by jít spíše o postupné předkládání problémů v delším časovém horizontu.

Jak jsem pozorovala u některých mých žáků, někdy je ale velice těžké rozpoznat, zda již nedostatky svého původního přesvědčení odhalili. Po stránce kognitivní probíhá toto odhalování ve skocích, kdy na stejném principu jakým je AHA-efekt při objevu, žákovi najednou dojde, co se ostatní snaží sdělit a jejich názor přijme. Zároveň s tím však přichází i myšlenka, jak bude reagovat navenek. Funguje zde totiž také jakási sociální brzda, která brání dotyčnému dát najevo své zapochybování, protože by tím tak dal vlastně za pravdu soupeři. U několika svých žáků jsem si všimla, že náznaky zpochybnění svých tvrzení projevují buď ve formě apatie vůči problému, nebo naopak agrese. Ondra například v okamžiku, kdy už ho s největší pravděpodobností spolužáci přesvědčili o jeho omylu, tak namísto toho, aby jim dal za pravdu, opakoval, že to stejně nechápe a o další diskutování přestal jevit zájem. Andrea se zase ve stejném okamžiku začala naopak vztekat (občas i o stůl praštila nějakou školní pomůckou), odsoudila řešený problém jako hloupost a prohlásila, že to dělat nechce.

Přiznání své chyby navenek je pro člověka někdy velmi obtížné. Ukazuje však na kvalitu lidské osobnosti. Myslím si, že učitel může tuto schopnost u svých žáků rozvíjet, i když zde jistě hrají roli i povahové rysy žáků. Sama jsem se o to pokoušela několika následující způsoby.

- *Nebála jsem se přiznat svou chybu.*

Kdykoli si žáci všimli, že jsem se dopustila chyby, vždy jsem poděkovala s dobrým pocitem, že žáci nejen výuku sledují, ale i přemýšlejí o tom, co dělají. „No vidíte, to máte pravdu. Tady jsem to spletla. Děkuji. Ještě, že to sledujete.“ Podle situace jsem pak ještě dodala komentář k tomu, proč jsem se chyby nejspíše dopustila. „Jo, tady jsem to chtěla vynásobit a nakonec jsem to sečetla.“

Když jsem se žáky začala ve 2. ročníku takto pracovat, některé to velice motivovalo k tomu, aby napjatě čekali, kdy mě zase budou moci opravit. Občas jsem jim i záměrně tu radost udělala, a vědomě se nějaké té chyby dopustila. Po určité době je to pak omrzelo, protože viděli, že udělat chybu beru jako něco, co se může stát každému, tedy i učiteli, a není to žádná ostuda.

Problém ale nastal, když v naší třídě začala některé předměty vyučovat i jiná paní učitelka. Už asi třetí nebo čtvrtou vyučovací hodinu, co působila u nás ve třídě, mě naštvaně ve sborovně upozornila, že jako třídní učitelka bych si žáky měla srovnat, protože ji neustále kontrolují a navíc i upozorňují, kde např. při zápisu na tabuli zapomněla čárku, místo toho, aby si rychle zapisovali. Přestože žákům vynadala i sama, aby ji stále nekontrolovali, jinak bude opravovat sešity i ona jim, žáci s korekcí nepřestali, jen ji už neupozorňovali nahlas. Někteří ale naschvál její chyby z tabule doslova opisovali a v sešitě je pak nosili jako trofej, kterou při každé příležitosti proti paní učitelce použili.

Je pochopitelné, že žáci tyto situace chápou jako souboj mezi třídou a učitelem. Je však rozumné ukázat jim, že je tyto situace lépe vnímat spíše jako výzvu k nalezení způsobu ke zkvalitnění života ve třídě.

- *Pokud žák objevení své chyby projevil i nahlas, byl pochválen*

Při diskutování se nejednou ukázalo, že chyba byla pro řešení problému přínosnější než pravdivé tvrzení. Diskutování o chybě nás všechny přimělo o problému více přemýšlet, často i hlouběji a z mnoha dalších pohledů. I chybné vstupy tedy byly v diskuzích ceněny a o to více, když odhalení chyby projevil sám jejich autor.

Ukázka z DII

212 Pavel: A jo. Já jsem se splet.
213 Uč.: Hm. Ale přesto fajn, žes to ukázal.

7. Závěr

V úvodu práce byl popsán cíl výzkumu, který byl rozložen především do dvou dílčích cílů:

1. Sledovat kognitivní a metakognitivní vývoj žáka (zejména u těch žáků, o nichž je k dispozici dostatek dat). Zvláštní zřetel přitom věnovat vývoji představ pojmů nula a sudost a schopnosti argumentace těchto představ.
2. Popsat proces vzájemného ovlivňování žáků v diskuzi. Hledat jevy (kognitivní, metakognitivní i sociální), které jsou v tomto procesu přítomné a významné.

Všechny tyto cíle byly sledovány v edukačním stylu VOBS a případně porovnávány s příklady z transmisivně vedeného vyučování.

Výzkumný vzorek je příliš malý na to, aby bylo možné dělat obecné závěry. Ale cílem výzkumu nebylo ani tak dospět k nějakým obecným závěrům, ale spíše hledat důležité jevy a vytvářet hypotézy o poznávacím procesu žáka. Následující části 7.1. až 7.3. jsou proto rozčleněny podle jednotlivých jevů, které vyplynuly z provedených analýz a které dokládají průběh objevování matematického pojmu, vztahu nebo procesu třídou a význam diskuze pro poznání i rozvoj žákovy osobnosti. Poslední část kapitoly (7.4.) je věnována sebereflexi.

7.1. Objevování matematického pojmu a vztahu třídou

- *Míra intelektuální energie, kterou žák vkládá do poznávacího procesu, je dána intenzitou potřeby problém vyřešit.*

Aktivita žáků při odhalování pravdy je poháněná potřebou přijít problému na kloub. Žáci mají sami silnou vnitřní potřebu zjistit, jak to je. Proto ani v jedné ze zaprotokolovaných diskuzí nenastaly okamžiky, kdy by učitel musel žáky pobízet, aby zkusili navrhnout nějaké řešení. Např. v DII tak žáci ihned po přečtení zadání ke směrové růžici a jeho uchopení začnou z vlastní iniciativy zkoumat vztahy mezi zapisovanými čísly. Místy se tak proto zdá, že cestu za poznáním si třída řídí sama a učitel je přítomen jen jako pozorovatel.

Vysoká aktivita třídy je tak patrná nejen ve vstupech opakovaně se zapojovaných žáků, ale i v těch, kteří se najednou ozvou až po delší době v průběhu diskuze. I ti, co nejsou v protokolu zaznamenáni, tedy diskuzi sledují, nad problémem pracují sami nebo případně diskutují o problému se sousedem.

Důvěra vkládaná do žáků tím, že jim učitel pravidelně ponechává dost prostoru, aby řešení objevili sami, působí na žáky silně motivačně. Navíc zcela spontánně přebírají odpovědnost za pravdivost výsledků, ke kterým se dopracují. Jsou tak vtaženi do problému, na jehož řešení se podílejí tím více, čím více je daný problém zaujal. Zaujetí o vyřešení otázky sudosti nuly se projevilo například tím, že diskutované téma po první diskuzi nezaniklo, ale naopak žáci se k němu při prvním podnětu znovu sami vrátili. Řešený problém se tedy v jejich hlavách vyvíjel dál, i když se o něm ve vyučování nemluvilo.

Zájem o nalezení řešení tak vede k tomu, že problém se nestává pro žáky uzavřeným ukončením vyučovací hodiny. Naopak potřeba dále se problémem zabývat, promýšlet ho a dozvědět se o něm ještě více přesahuje rámec vyučování. Často tak dochází k tomu, že je problém řešen i dále mimo třídní kolektiv (s rodiči, prarodiči, staršími sourozenci nebo dalšími kamarády). Otázku sudosti nuly proto žáci prodiskutovávali po vyučování ve frontě v jídelně a zaznamenáno bylo i vrácení se k problému v rodinném prostředí. Jak je ukázáno v pedagogickém deníku k Amálce (s. 65) i v přepisu videozáznamu o pravoúhlém trojúhelníku se dvěma pravými úhly (s. 66), žáci cítili potřebu prodiskutovat ve třídě názory, které získali od rodičů nebo z jiných vnějších zdrojů. Přijetí myšlenek, které slyšeli jinde, tedy nebylo nekritické. Prostředí třídy se opět projevilo jako rozhodující pro prověření správnosti myšlenek.

Jako další doklady zájmu žáků o řešený problém lze dále považovat i prosby několika z nich zase se k problému při vyučování vrátit a texty, které žáci k problému vytvoří. K řešení otázky sudosti nuly sepsala své argumentace Martina (část. 4.1.2.). Zaujetí problémem nuly je patrné také z textu Ondry vzniklého po DII. V jeho slovech je cítit až jakési okouzlení nulou samotnou.

Nula je nejdůležitější v dějinách číslic, protože jí začíná notová osnova a také končí. Nulaje v každém čísle.
příklad: 012, 120, 140, 014.

Obrázek 28: Text Ondry vzniklý o přestávce následně po DII.

Pod notovou osnovou, jak mi Ondra dodatečně vysvětlil, myslel číselnou osu. Příčinou této záměny zřejmě bylo, že při psaní tohoto textu zároveň myslel na to, že se ještě musí připravit na další hodinu hudební výchovy. Pěkná mi zde ale připadá představa číselné osy, která od nuly ve směru kladných čísel nulou začíná, ale ve směru od záporných čísel k nule nulou končí.

- *K významným posunům v poznání dochází v důsledku překonání překážky, která v řešitelském procesu vznikla.*

Ve sledované třídě žáci ve 2. ročníku dospěli v diskuzi k určování sudosti čísla podle toho, jestli jde (jejich slovy) rozdělit na dvě stejná čísla. Přijímání sudosti jako rozdělení se však pro některé žáky stalo překážkou, která vedla až k vyřazení nuly ze světa čísel. K tomu došlo ve 4. ročníku, kdy se ukázalo jako problém rozhodnout, zda nulu přiřadit k sudým nebo lichým číslům.

Při společné snaze žáků překonat tuto překážku došlo nejen k rozšíření určování sudosti o další možné způsoby, ale i získání většího vhledu do rozlišení mezi sémantickým a strukturálním vnímáním pojmu nula a jeho zapojení do mnoha dalších kontextů.

- *Chyba žáka odhalená a analyzovaná třídou bývá často pro některé žáky zdrojem nového objevu.*

Vzniklá chyba se může stát také výborným podnětem k diskuzi, která umožní odhalit další nové zkušenosti a prohloubit poznání. Významnou roli při tom však hraje skutečnost, že na chybu nepoukáže učitel, ale odhalí ji třída. Tak tomu bylo i v DII, kdy chyba při zápisu čísel při uchopování úlohy připomněla žákům řešený problém z DI a stala se proto novým impulsem pro znovuotevření otázky sudosti nuly. Kdyby ale impuls ke korekci chyby přišel od učitele, zřejmě by nula stojící na severu růžice tolik pozornosti neupoutala a k diskuzi by nedošlo.

Úroveň kritického přijímání myšlenky, která přijde od spolužáka, je totiž výrazně vyšší než u té, kterou slyší od autority, jakou je učitel v tomto věku žáků do 12 let. Učitel, který žákovi radí, snižuje jeho možnost vnímat danou myšlenku kriticky. Úroveň kritického posuzování může učitel zvyšovat například tím, že občas udělá chybu, ať již záměrnou nebo nezáměrnou, kterou když žáci objeví, jsou pochváleni.

- *Konkrétní poznání žáka zasahuje do různých oblastí jeho kognitivní struktury*

Poskytnutí prostoru žákům formulovat své myšlenky, hledat argumenty pro svá přesvědčení a zvažovat výpovědi spolužáků umožnilo většině žáků nejen samostatně dospět k poznání, že nula je sudá, ale zároveň jej opřít o celou škálu argumentací, které sudost nuly potvrzují. Diskuze se ale ukázaly významné i pro širší prodiferencování pojmu nula. Během řešení problému sudosti nuly totiž vyvstala řada dalších otázek, jejichž řešení přispělo nejen k prohloubení původních představ, ale i k propojení pojmu nula s mnoha dalšími kontexty. Prodiferencování nuly se týkalo v DI následujících kontextů:

- proces skládání a rozkládání čísel
- číselná osa a rytmus sudých a lichých čísel na číselné ose
- desítková soustava a číslice nula
- aditivní struktura sudé číslo plus sudé číslo je číslo sudé
- dělení nulou
- nekonečno

a v DII navíc kromě předchozích:

- aritmetická struktura zbytkových tříd modulo 4
- rytmus sudých a lichých čísel v posloupnosti s diferencí pět
- aditivní a multiplikativní struktury sudých čísel

Vzhledem ke komplexnímu přístupu k otázce nuly se může při sledování postupu jednotlivých výpovědí žáků místy zdát, že od původního tématu odbočují a zabývají se úplně něčím jiným, než mají. Jenže právě naopak tím, že je klíčový bod sporu vkládán do dalších kontextů, dochází k propojení myšlenky nuly s dalšími oblastmi, jejichž souvislost nebyla dříve jasná ani učiteli. Učitel má totiž zcela jiné zkušenosti než jeho žáci a i jeho vhled do pojmů a vztahů matematiky je proto jiný. Mezi žáky jde o zkušenosti stejné věkové kategorie, a proto jsou mezi sebou daleko více kompatibilní než se zkušenostmi dospělého člověka. Žáci si tedy mezi sebou daleko více rozumí.

V okamžiku bouřlivé diskuze, jaká vyvstala právě hlavně v DI, kdy různí žáci začnou přistupovat k problému jinou cestou, není učitel tak podle mého schopen toto zdánlivé uhýbání od hlavního tématu sledovat. Avšak ponecháním možnosti žákům mezi sebou o svých názorech diskutovat umožňuje zasazování problému do širších kontextů (není řešen jen problém, ale i okolí problému), které si navíc mezi sebou přenášejí (kontext jednoho žáka ovlivňuje a začleňuje se do kontextu druhého žáka).

Co má učitel v této době dělat, když nemá do diskuze žáků zasahovat? Já osobně jsem byla schopna zachytit jen malou část žákovských argumentů. Běžně však nestíhám v rychlém toku jednotlivých argumentů o nich zároveň přemýšlet. V takových okamžicích si tedy dělám jen rychlé záznamy toho, co jsem zachytila.

Tyto poznámky pak představují cenný zdroj pro promýšlení dalšího postupu práce nad problémem a především pro hledání odpovědi, proč žáci uvažovali tak, jak uvažovali. Pro mou osobní reflexi je pak i cenné porovnání toho, co jsem v diskuzi zachytila, s videozáznamem. Videozáznam mi mnohdy odkryje zcela jiné interpretace výpovědí žáků, než jak jsem je pochopila v danou chvíli v hodině, a pomůže mi i objevit další argumentace žáků, které jsem při vyučování vůbec nepostřehla.

Jak je ale vidět při celkovém pohledu na diskuze DI a DII, že i když se žáci zabývají celou řadou různých otázek, hlavní nit diskuze - sudost nuly - neztrácejí, ale naopak ji sami vedou až do další diskuze odehrávající se až za měsíc.

- *Pro kvalitu konkrétního poznání žáka hraje třída nezastupitelnou roli.*

Každý žák vnímá problém v jiném kontextu, protože má jiné zkušenosti (jak životní, tak matematické) a i jinak utvořenou síť pojmů ve svém vědomí. Třída proto představuje burzu různých nápadů a představ. Diskuze pak umožňuje žákům konfrontovat tyto své představy s představami spolužáků a tím je obohacovat a zpřesňovat. Součinnost třídy je proto nepostradatelná pro postupné rozvíjení myšlenek. Nikdo z žáků by nebyl schopen sám najít takové spektrum podnětů a úvah, které byly společně diskutovány. Ale v kolektivu se jedna myšlenka stává inspirací pro druhého, který, pokud ji považuje za vhodnou, ji začleňuje do svých představ a případně ji posouvá trochu dále. Třída tak působí trochu jako síto všech možných nápadů, kdy po několikerém prosívání zbývají jen správné úvahy, které jsou navíc ještě prohlubovány.

I v DI a v DII spolupracující kolektiv třídy výrazně přispěl k vykrystalizování správných představ. Původní intuitivní vnímání sudosti se proto během diskuzí zpřesňovalo, protože žádný z výroků neprobíhal izolovaně. Každá myšlenka někoho oslovila. Reakce se projevily nejprve v základní odezvě, buď jako souhlas nebo nesouhlas, a poté se již výpovědi začaly zpřesňovat až k závěrečnému odhalení, že nula je sudá.

Navazování myšlenek žáků bylo zaznamenáno na řadě míst zaprotokolovaných diskuzí. Jak je vidět např. na následujícím příkladu, vztahujícímu se k rozvíjení nápadu sledování rytmu sudých a lichých čísel v posloupnosti čísel, žáci na sebe nejen navazovali, ale své myšlenky také postupně upřesňovali.

1. Lenka (089, DI) – Upozorňuje na pravidelné střídání sudých a lichých čísel na číselné ose od nuly směrem ke kladným číslům.

2. Martina (132, 146, 149, 154, DI) – Prodlužuje Lenčinu myšlenku i do záporných čísel. Nula se tak dostává dovnitř rytmu sudých a lichých čísel, a tím je argument posílen.

3. Ondra (216, DI) – Z celé číselné osy vybírá jen inkriminovanou trojici čísel kolem nuly a ukazuje, že mezi dvěma lichými čísly musí být číslo sudé.

4. Vojta (153, 156, DII) – Přenáší objev rytmu sudých a lichých čísel na číselné ose do nové situace, a to do posloupnosti čísel s diferencí pět, kde opět k tomuto rytmickému střídání dochází.

Odhalení rytmu u čísel na severu směrové růžice s pěti vrcholy ukazuje, jak žáci postupně pronikají i k podstatě problému sudosti nuly. Jak každý nápad pomáhá lépe porozumět faktu, nula je sudé číslo.

1. Marek (109, DII) – Ukazuje, že nula stojí na severu čtyřcípé růžice mezi samými sudými čísly.

2. Šimon (121, 142, 147, 151, 154, DII) – Chce tuto skutečnost nabourat rozšířením růžice na pět vrcholů, čímž nulu postaví mezi sudá i lichá čísla.

3. Vojta (153, 156, DII) – myšlenku Šimona překonává tím, že mezi sudými a lichými čísly v pěticípé růžici odhalí rytmus střídání sudých a lichých čísel, v němž nula stojí na pozici sudých čísel.

- *Žák, který je již schopen vnímat strukturální argumentaci, ji považuje za průkaznější, než byla dřívější argumentace sémantická.*

Tendenci použít spíše strukturální důkaz jako pádnější argument namísto sémantického je možné najít v protokolech u několika žáků.

- Ondra (202, DII) říká, že střídání sudých a lichých čísel na číselné ose funguje až třeba do miliardy, a tak jinými slovy vyjadřuje, že tento rytmus platí pro celou strukturu přirozených čísel.

- Pavel (266, 269, DI) snaží se argument rytmického střídání sudých a lichých čísel nesprávně aplikovat na rozklad nuly na dvě nuly jako nuly sudé, na tři nuly jako nuly liché, čtyři nuly jako nuly sudé…. I přestože je tedy výpověď Pavla založena na chybné představě, obsahuje i dobrou myšlenku. Mám-li rozhodnout nějaké tvrzení, pak jeho vložení do struktury mi pomůže najít odpověď. Jeho metakognitivní představa je tedy v pořádku.

Směrování ke strukturálním důkazům je však patrné i v celkovém pohledu na vývoj argumentace třídy v obou diskuzích. Pro žáky je sudost nejprve chápána jako vlastnost konkrétního čísla, jako jeho možnost rozdělit ho na dvě stejné části. Ve druhé diskuzi je již ale sudost vnímána jako vlastnost struktury. Tedy vlastnost, která nevyžaduje konkrétní číslo a je schopna vstupovat do vztahů typu sudý plus sudý rovná se sudý[82.]

- *Autonomní poznávací proces zpravidla nesměřuje přímo k cíli.*

Autonomní poznání, tedy poznání, které není řízeno učitelem, se zřídka ubírá hned správným směrem a obvykle zabíhá do slepých uliček. Při formování generického modelu jsou tedy do něj někdy zprvu zahrnuty modely špatné a občas je i dobrý model zamítnut. Velice pěkně to bylo v DI možné sledovat např. u Lenky:

Vstupy 001 – 089 (kromě 027) - Lenka obhajuje sudost nuly a dokládá ji rytmickým střídáním sudých a lichých čísel na číselné ose, který odhalila.

Vstup 212 – Pavel přichází s tvrzením, že nula je sudolichá, ke kterému se začnou přiklánět další žáci.

Vstup 219 – Lenka oponuje Pavlovi a dalším, že číslo může být jen jedno, buď sudé, nebo liché.

Vstup 226 – Lenka opouští argument rytmu a vrací se k myšlence možnosti rozdělení nuly na dvě i více nul. Tyto dva kontexty ale nepropojuje.

Vstup 243, 275, 320, 321 – Připouští sudolichost nuly na základě chybné asociace – nula rozdělená na dvě nuly je nula sudá, rozdělená na tři nuly je nula lichá.

Na konci DI se většina žáků přiklonila k chybnému závěru o nule, že je lichosudá. Ani kolektiv třídy se tedy nemusí vždy přiklonit ihned ke správné myšlence, ale volí tu, která je pro něj sugestivnější. Důležité ale je, že přinejmenším ve vědomí několika žáků je tento názor vnímán ještě kriticky.

---

[82] Posun, ke kterému zde dochází, si člověk uvědomí, když analogicky odhalí tento kognitivní jev v jiných situacích. Např. pro malé dítě je máma jeden konkrétní člověk. Později ale pod stejným pojmem začne chápat vztah – máma je vztah mezi dítětem a ženou, které se narodilo. A nakonec již vnímání těchto vztahů nemusí být propojeno s konkrétními lidmi, aby chápalo např. větu máma mámy je babička, která je obecně platná pro všechny lidi.

Takovéto hledání bývá proto velmi náročné na čas. Přesto se domnívám, že orientace tohoto procesu pouze na přímý cílesledný pohyb je z hlediska rozšiřování matematické kultury žáka nevhodné. Pro porozumění myšlence je totiž zapotřebí porozumět i tomu, jak je tato myšlenka propojena na myšlenky další. Lze to metaforicky přirovnat k narovnávání vodních toků, které odtok vody sice urychlí, ale má negativní dopad na okolní krajinu.

- *Náročnější poznávací proces probíhá často v etapách. Komplexní poznání třída odhaluje po částech.*

Řešení problému sudosti nuly proběhlo v mé třídě v podstatě ve třech etapách. První etapou byla DI. Druhá etapa zastoupená textem Martiny byla spíše individuální a ke třetí etapě došlo v DII.

Čas je nedílnou součástí procesu poznávání. Znám to i ze své osobní zkušenosti, že úloha, která se zprvu zdála být neřešitelná, se po čase najednou stává zcela zřejmá. Někdy je právě dostatek času potřebný pro dozrání myšlenek. Pauza a zkušenosti, které člověk v pauze získá, totiž často umožňují stejný problém uchopit jiným způsobem.

Proto i v DII bylo oproti konci DI patrné zcela jiné naladění třídy. Většina žáků byla již o sudosti nuly pevně přesvědčena a zcela se změnil počet zastánců pro jednotlivá tvrzení, která lze z hlediska sudosti nebo lichosti o nule říci. A tak vítězné tvrzení z konce DI, že nula je lichosudá, na začátku DII držel v podstatě už jen jeden žák. Odstup jednoho měsíce získaný časovým rozestupem mezi DI a DII tedy přispěl k tomu, že chybné myšlenky pomalu zanikly a naopak ty dobré se staly součástí vědomí třídy. Navíc neukončený problém z DI na některé žáky stále působil jako výzva dále se problémem zabývat.

- *U mnoha vyučovacích hodin vedených metodou VOBS je výsledek poznávacího procesu jednotlivých žáků různorodý jak z hlediska jevů, které žák zvažoval, tak z hlediska jejich hloubky.*

Vyučovací hodina představuje určitý výsek práce všech žáků na jednom problému. U každého žáka ale probíhá poznání různě a z toho vyplývá, že hodinu ukončuje každý žák na své úrovni. Proto ne vždy je možné, aby všichni žáci během jedné vyučovací hodiny dospěli ke konkrétnímu pravdivému výroku (v mém případě, že nula je sudá), aby byl cíl hodiny naplněn.

Diskuzi DI byla ponechána téměř celá vyučovací hodina, ale žáci se ke správnému řešení nedobrali. Přesto tento čas nepovažuji za ztrátový. V hlavách žáků se objevily myšlenky, které tam do té doby nebyly a na které v budoucnu budou moci případně navázat. Nula je přítomna v mnoha oblastech matematiky, a tak se k nule žáci znovu vrátí např. při hlubším seznamování se se zlomky, když zjistí, že ve jmenovateli nesmí být nula. Stejně tak odhalí, že napíší-li nula dvojtečka nula (0:0) ve smyslu děleno, tak jde o něco, co je v matematice zapovězeno. Ve fotbale to ale smysl má, protože zde dvojtečka znamená poměr.

Obecná didaktika doporučuje na závěr hodiny udělat sumarizaci. Domnívám se však, že obzvláště v případech, kdy třída nedospěje k jednoznačnému závěru, by sumarizaci neměl provádět učitel. Finální poznání, ke kterému učitel dospěl během diskuze, ovlivňuje poznání jednotlivých žáků na úkor jejich autonomie. Na konci hodiny jsou navíc žáci již vyčerpáni a nejsou proto schopni dávat příliš pozor na učitelovu sumarizaci. Sumarizace je tak i pro učitele zavádějící, protože si myslí, že to, co řekl, je i v hlavách žáků.

Diskuze DI byla uzavřena hlasováním žáků, ke kterému tvrzení vzhledem k sudosti nebo lichosti nuly se přiklání. Kdyby bylo více času, považovala bych ještě za vhodné, kdyby se žáci sešli ve skupinkách podle toho, k jakému tvrzení se přihlásili, a za svou skupinu shrnuli argumenty pro tvrzení, které zastávají. Závěr hodiny by tak byl uzavřen sumarizací hlavních myšlenek, kterou by však neudělal učitel, nýbrž žáci.

7.2. Význam třídní diskuze pro rozvoj matematických zkušeností, znalostí a schopností žáka?

- *Iniciací i hnacím motorem diskuze je různost názorů. Čím zásadnější je tato různost, tím je diskuze intenzivnější a pro poznávací proces aktérů účinnější.*

Čím je diskuze intenzivnější, tím šířeji zabíhá od klíčového bodu do jiných kontextů. Přičemž míra intenzity je také dána mírou závažnosti problému, tedy spíše jak žáci tuto závažnost vnímají.

K potlačení různosti názorů žáků dochází, když učitel nedává dostatečný prostor pro tvořivost žáků a chybné názory se snaží rychle odstranit. Tyto jeho tendence pak působí jako tlumič vzniku různosti názorů ve třídě.

- *Jako velice účinný podnět k diskuzi se ukázal rozpor mezi sémantickým a strukturálně matematickým vnímáním pojmu (pravděpodobně se toto vztahuje i na proces, vztah nebo situaci).*

Sémantická představa opřená o fyziologickou zkušenost (dělení koláče na dvě stejné části, záporné číslo jako krok dozadu na číselné ose, osová souměrnost objevená přehýbáním papíru) je velice silná. Tato představa je na jedné straně pozitivní tím, že dává autorovi jistotu porozumění oporou o situace z běžného života (např. Matěj a jiní v DI chápou nulu ve smyslu, jak je používána v běžném životě), ale na druhé straně představuje překážku pro abstraktnější vnímání objektu. Přitom abstrakce je potřebná pro hlubší porozumění (pro možnost jít až za abstrakci). Hlubší poloha je v DI dána otázkou, zda nula patří mezi sudá čísla nebo nepatří, kterou především Matěj odmítá řešit (sémanticky vnímaná nula jako NIC se nedá dělit, a proto o nule z hlediska sudosti není možné nic říci).

Rozpor mezi sémantickým a strukturálním vnímáním pojmu nula lze považovat za základ celé diskuze DI, kdy proti sémantické představě Matěje a několika dalších spolužáků se postavil zbytek třídy. Ten ale také nebyl ve svých názorech zcela jednotný v tom smyslu, že každý jejich názor vycházel z trochu jiného kontextu, v němž se nula objevuje.

Zároveň však bylo vidět, že žáci rozporu mezi svým přístupem k nule a tím, že se Matěj a další nedovedou oprostit od pouze sémantického vnímání nuly, velice rychle porozuměli. Z toho důvodu se i ti, kteří již byli schopni o nule trochu uvažovat ve struktuře, začali hledat situace, jimiž by bylo možné v sémantické rovině nulu uchopit, aby poté mohla být přijata do struktury čísel a zároveň došlo k odhalení její sudosti. Tyto návrhy vycházely ze tří hlavních ohnisek sporu týkající se nuly:

1. pojem nula (hlavně u Matěje a Andreji chápán jako NIC)
2. charakteristické vlastnosti nuly (sudost nuly)
3. procesy, které lze s nulou dělat (půlení nuly)

Tato tři hlediska jsou však tak úzce propojena, že s nimi lze jen velice obtížně pracovat odděleně. Zahrnují celou síť představ, které se ale neustále mění. Z toho důvodu jsou chápány dohromady jako kontext nuly.

Ke kontextu nuly se žáci vyjádřili mnoha způsoby, z nichž je jich zde uvedeno sedm, a jsou uspořádány od nejvíce sémantického k tomu, který je nejvíce opřen o strukturu.

- stav fotbalového zápasu (0:0)
- pytlíky – rozdělování nulového počtu do pytlíků
- láhev – rozlévání nulového obsahu
- vzduch – připodobnění neuchopitelného NIC ke vzduchu, který rozdělit jde
- rytmus - nula v rytmu sudých a lichých čísel na číselné ose
  - nula jako počátek posloupnosti sudých čísel s diferencí čtyři a osm
  - nula v rytmu sudých a lichých čísel v posloupnosti s diferencí pět
- nula v desítkové soustavě na konci sudých víceciferných čísel
- aditivní struktura sudých a lichých čísel

V navržených způsobech různých žáků jak propojit sémantické chápání nuly se strukturou je tak možné sledovat jejich silnou potřebu najít soulad mezi sémantikou a strukturální matematikou. Obsah i délka diskuze ale ukázala, jak je velice těžké vázání žáků na sémantiku prolomit. Obzvláště, když žák (hlavně Matěj) snahám svých spolužáků nerozumí, protože své tvrzení, že s nulou nelze nic dělat, chápe jako dogma. O nule podle něj nejde diskutovat.

Konflikt mezi sémantikou a strukturální matematikou je ale pro porozumění matematice velice významný a důležitý. Strukturální matematika tím, že pracuje s ideálními abstraktními objekty, vede naši mysl ke konstruktům, které jen stěží nacházejí, nebo vůbec nenacházejí oporu v realitě. I v historii musel člověk tuto mez mnohokrát překročit (uznat konstrukty bez opory v realitě), aby byl schopen zdokonalovat matematické poznání. Tak tomu bylo například při objevu čtyřdimenzního prostoru, komplexního čísla, limity apod.

Ve vyučování, v němž se žáci ihned dozví správné řešení (žákům předkládá rovnou abstraktní objekty), které neumožní se konfliktem mezi sémantickým a strukturálním pojetím veřejně zabývat, sice tento konflikt nebude navenek přítomen, ale přesto bude jistě figurovat v hlavě jednoho nebo i více žáků. Nemožnost ujasnit si tyto dva přístupy chápání pojmu tak může negativně ovlivnit přístup i k celé matematice. Matematika začne být vnímána jako dva oddělené světy. Na jedné straně matematika, která je opřena o zkušenosti a kterou žák chápe, a na druhé straně ta, kterou je potřeba se naučit mechanicky nazpaměť a kde porozumění obvykle schází.

- *Vzájemné porozumění žáků v diskuzi je velice důležité. Případné komunikační nedorozumění mezi žáky zpomaluje poznávací proces třídy. Úlohou učitele je přítomnost nedorozumění evidovat a vést žáky k jeho odstranění.*

Z dlouhodobého hlediska příležitost mluvit před ostatními nepochybně přispívá ke kultivaci jazyka a vyjadřovacích schopností žáka. Jak se ale ukázalo při analýzách předložených protokolů, možnost mluvit bylo pro některé žáky důležité i pro dozrávání nehotových myšlenek, jejich utřiďování i postupnou korekci. V řadě vstupů žáků je tak možné pozorovat, jak si žák ujasňuje svou myšlenku, která ho napadla a kterou chce sdělit, až v průběhu mluvení. Taková řeč působí nesrozumitelně, jakoby mluvčí vůbec nevěděl, co říká a jen něco „blekotal“. Ve skutečnosti mu však mluvení pomáhá myšlenku formulovat a dále své úvahy rozvíjet.

Ač se může někdy jevit takováto řeč zdlouhavá a nic neříkající, řekla bych, že by žák měl dostat prostor, aby ji dokončil. Může totiž obsahovat důležité myšlenky, kterým, i když učiteli zůstanou skryté, někdo z dalších žáků porozumí. Pokud tedy učitel žáka přeruší i s dobrým záměrem, ať si vše nejdříve promyslí, než promluví, nejspíše tak dojde k přetržení nedokončených úvah u žáka a ztrátě možného získání dalších myšlenek pro třídu. Nejen pouze pro žáka je podle mého totiž příliš náročné zároveň promýšlet, jak říci myšlenky, které má v hlavě, ale zatím neví, jak je naformulovat, a k tomu ještě sledovat srozumitelnost vyjádření, kterým vše sděluje. Navíc takovýmto vstupem učitel nejspíše vezme dalším žákům ve třídě chuť se o své myšlenky podělit, protože začnou mít strach, že se jim myšlenka také nepodaří správně zformulovat.

Přesto je úkolem učitele pro podporu zdárného průběhu diskuze sledovat, zda si žáci mezi sebou rozumí. Učitel má ale často nutkání kostrbatou řeč žáka přeformulovat přesněji, protože se mylně domnívá, že jeho formulace, která se jemu jeví jasná, bude srozumitelná i ostatním žáků. Jak jsem se ale nejednou přesvědčila z analýz svých záznamů, není tomu tak. Mnohem vhodnější způsob je proto obrátit se na žáky, zda krkolomnému sdělení spolužáka rozumí. A v případě, že nerozumí, dát žákovi znovu prostor, ať se pokusí své myšlenky říci ještě jednou. Opakovaná snaha zformulovat své myšlenky pak většinou vede ke zestručnění a zpřesnění původního sdělení a jeho obsah se stane srozumitelný alespoň pro někoho ve třídě, který může pomoci myšlenku žáka upřesnit pro ostatní a případně ji dále rozvinout. Žáci se tak i učí, jak dělat vágní formulace přesnějšími.

- *Kvalitu diskuze zvýší učitel tím, že podporuje vystoupení slabších i nejslabších žáků, protože jejich často nepřesné nebo chybné představy iniciují velice přínosné diskuze.*

Ve své třídě jsem byla velice často svědkem, že pro diskuzi byli přínosnější matematicky slabší žáci než ti silní. Matematicky silní žáci jsou obvykle schopni přijít hned na správné řešení a pak není o čem diskutovat. Ale přestože se učiteli zdá věc vyjasněná, mezi slabšími žáky se najdou tací, kterým problém jasný není.

V DI byl takovým významným prvkem, který přispěl k bohatosti diskuze, žák Matěj. Téměř neměnný názor Matěje po celou dobu diskuze působil na spolužáky jako neuvěřitelná výzva hledat další a další argumenty, nové situace a kontexty, do kterých nula vstupuje. Ač tedy u Matěje nebyl během diskuze zaznamenán žádný názorový posun, silně přispěl k bohatšímu a mnohem hlubšímu porozumění nuly u svých spolužáků.

Myslím si, že málokdo z učitelů by od nejslabšího žáka ve třídě očekával nějaký zvláštní přínos pro poznávací proces třídy. A navíc od žáka jako byl Matěj. Matěj patřil mezi nejslabší žáky a mnohdy dokázal silně komplikovat práci učitele. Nenosil pomůcky a úkoly. Obvykle neměl čím psát, protože během prvních vyučovacích hodin psací potřeby poztrácel nebo už rovnou přišel s prázdným penálem. Obtížně udržoval pozornost a často vyrušoval ostatní, když nebyl dostatečně individuálně zaměstnán. A k tomu ještě věčně nespokojení rodiče a jejich nekonečné výhrady k vyučovacímu stylu učitelky, který dle slov otce jejich synovi nevyhovoval. Nyní v tom nacházím až jistý paradox, protože žák, který pro učitele představuje spíše zátěž, může být pro třídu tak významný.

Domnívám se, že přínos vstupů Matěje pro mou třídu by bylo možné po jistých úpravách připravit pro využití i v dalších třídách. Stejně jako pro zkoumanou třídu by tak i v dalších třídách mohly některé argumenty Matěje posloužit jako podněty pro vyvolání diskuze, která by vedla k hlubšímu porozumění problému nuly.

7.3. Sociální jevy provázející proces rozvinuté třídní diskuze

- *Pokud ve vypjaté situaci protichůdnosti názorů žáků antagonismus sféry intelektuální nepřerůstá do sféry sociální a citové, není omezována schopnost kolektivu objevovat.*

V analyzovaných diskuzích je rozdílnost názorů i chyba samotnými žáky považována za samozřejmou součást poznávání. Nenajdeme v nich tedy vstupy, v nichž by jeden z žáků měl snahu zesměšnit druhého za to, co řekl. Žáci se vzájemně respektují, protože každý názor, nápad, myšlenka je důležitá. V průběhu diskuze totiž není možné posoudit, který z vyslovených argumentů nakonec povede nebo alespoň přispěje ke správnému řešení. V interakci mezi žáky lze tak najít spíše tendenci prodiskutovat výpovědi, které se nezdají být korektní, snaha posoudit jejich pravdivost a případně přivést autora k jejich opravě.

Tak tomu bylo v přístupu třídy ke vstupům Matěje v DI. Nikdo neodsoudil jeho sémantickou představu o nule, ale naopak se ostatní snažili najít způsob, jak ji rozšířit. A stejně tak dále u Bořka v DII, kdy jeho osamocené tvrzení, že nula je lichosudá, povzbudilo třídu k hledání další argumentace, která by mu jeho omyl pomohla vyvrátit. A protože Bořek necítil negativní tlak na svou osobu kvůli tomu, co řekl, postupně zapracovával argumenty svých spolužáků do svých představ a nakonec své chybné tvrzení opustil a přijal názory oponentů.

Oba tyto příklady jsou dokladem účelného sociálního chování mezi spolužáky, protože názorová různost nepřerůstá v osobní nepřátelství. Jsou tedy dokladem pozitivních vztahů mezi žáky, kteří pluralitu názorů berou spíše jako výzvu k hledání pravdy než jako podnět k vzájemnému napadání.

Velice důležitou roli zde hraje osobnost učitele. Učitel respektuje individuální názor a nikdy se neuchyluje k ironii nebo k jakékoli další formě znevažování i naprosto nepravdivého výroku žáka. Má úctu ke každému intelektuálnímu názoru. Do argumentace žáků nezasahuje a nepřiklání se ani k jednomu z názorů. Přesto všichni žáci cítí, že by učitel byl rád, kdyby se jim povedlo např. Matěje přesvědčit. Potřeba Matěje přesvědčit je tak sycena i snahou ukázat učiteli, jak jsem dobrý při přesvědčování kamaráda.

- *Možností diskutovat své názory roste intelektuální sebevědomí a autonomie žáka*

Zvyšování intelektuálního sebevědomí není problém u silných žáků, kteří přinášejí správná řešení a argumenty. U slabých žáků se však může zdát, že se pokoušejí přijít s nějakými myšlenkami, ale nakonec zjistí, že stejně bylo všechno špatně, a tak si spíše budou připadat hloupě. Přesto si ale myslím, že žádná odhalená chyba v názorech žáků v diskuzích nebyla provázená těmito pocity. Intelektuální sebevědomí není totiž u žáků dáno jen vědomím úspěchu z velkého objevu, ale je syceno reakcí okolí (tím, že okolí bere mé myšlenky vážně) a je jedno, jestli jsou tyto reakce pozitivní, nebo negativní. Reakcí spolužáků tedy intelektuální sebevědomí narůstá na základě síly sociální odezvy na danou myšlenku. Utváření intelektuálního sebevědomí žáka je tak převážně v kompetenci jeho spolužáků.

Formování autonomie žáka je naopak spíše v rukou učitele. K narušení autonomie dochází, pokud učitel neumožní žákovi jeho myšlenku sdělit. Například jej přeruší slovy: „Teď sem tohle nepleť."

Příklad projevu autonomního myšlení u žáka můžeme najít v DI ve vstupech Lenky. Lenka (126, DI) - „Ne, pani učitelko, vůbec." - projevuje nesouhlas, že by názor spolužáka, který učitelka pochválila, byl správný. Je tedy schopna kriticky pohlížet i na argumenty, které se zdají být učitelkou schválené. Podobně pak v dalším jejím vstupu (Lenka, 241, DI) - „V učebnici to nemusí být, ale nula plus nula je nula..." – je vidět, že nepotřebuje pomoc jiných autorit (učitele, učebnice), protože je schopna pravdu odhalovat a posuzovat sama.

K budování autonomie i intelektuálního sebevědomí žáků, které vedlo ke zvažování názorů autorit (jako třeba rodičů) namísto jejich pouhého přejímání, přispěla v mé třídě jistě i skutečnost, že žáci ve škole a poté i doma řešili úlohy různých matematických prostředí, které rodiče neznali. Rodiče nemohli v domácích přípravách se svými dětmi vycházet z toho, co zažili ve škole sami, a často zjišťovali, že úlohám, které jejich děti bez problémů řeší, vůbec nerozumí nebo jim zaberou mnohem více času. Při kontrole domácích úkolů se mi pak nejednou někteří žáci chlubili, že jejich rodiče na řešení nemohli přijít, ale oni to dokázali, jak ukazuje i následující poznámka z pedagogického deníku u Šimona.

11. 11. 2009
Šimon: Mamka to řešila celý víkend, ale nešlo jí to. A já jsem pak přijel a hned jsem to vyřešil.

- *Důležitější než konkrétní poznání, které z diskuze vzejde, je formování kognitivní a metakognitivní sféry žáka.*

Předpokládám, že tradiční pohled na prezentované diskuze vede člověka k přesvědčení, že problému nuly bylo věnováno příliš mnoho času a že tento čas byl v podstatě ztrátový. Takovýto pohled však pohlíží pouze na konkrétní matematické poznatky a ne na schopnosti, které byly u žáka rozvíjeny.

Výsledek, k němuž se žáci dobrali, že nula je sudé číslo, není to nejdůležitější, co diskuze přinesly. Důležitější je rozvíjení schopnosti hledat argumenty, formulovat své myšlenky, naslouchat druhým, posuzovat příchozí informace, vytvořit si názor, diskutovat s ostatními.

- *Diskuze kromě rozvoje kognitivních a metakognitivních potencí utváří hodnotový systém žáka, zejména pak schopnost účinné spolupráce.*

Při diskuzi se spolužáky se žáci mimo jiné učí také spolupracovat. Žák se učí týmové práci v tom smyslu, aby tým byl bez sociálního tření a aby výkonnost týmu byla optimální. Vzájemným sdílením svých nápadů, představ a jejich posuzováním tak spějí ke společnému cíli – odhalit pravdu. Přitom spolupráce vytvořená na řešení matematických úloh přesahuje do sociální oblasti a žáci zesilují svá přátelství. Zažívají tak například radost z úspěchu svého spolužáka, budují větší vzájemné porozumění a respekt k názoru druhých.

7.4. Sebereflexe

Původním impulsem pro výzkum bylo získání argumentace a osobních dokladů z praxe pro učitele, kteří nevěří v efektivnost výuky podle metody VOBS. Mým záměrem tedy bylo sledovat poznávání žáků, když dostanou prostor samostatně objevovat (dle principu konstruktivismu postupně budovat své poznání). Při analyzování a následném zpracovávání získaných dat jsem si ale začala postupně uvědomovat, že význam práce leží výrazně i v rovině osobní.

Možnost dále studovat didaktiku matematiky i po ukončení magisterského studia jsem zprvu vnímala jako velký přínos pro mou praxi. Postupem času jsem ale začala pociťovat, jak mě strašně vyčerpává často hned po vyučování chvátat na fakultu a pak do noci dělat přípravy a opravovat sešity. Přípravy na vyučování mi obzvláště zprvu zabíraly hromady času, protože jsem se snažila realizovat všechny své nápady a ještě jsem pro žáky vyráběla pomůcky. Do praxe jsem z magisterského studia vstupovala s nadšeným zápalem, a tak jsem neváhala s otevřením matematického kroužku, který pro velký zájem probíhal v několika skupinách, a zapojením se do všech dalších aktivit a inovací školy se snahou být i pro školu co nejvíce prospěšná. Výsledkem toho však byla vedle vyučování hromada další práce. Do toho jsme ještě jezdili na víkend do jižních Čech a pracovali zde na stavbě našeho vysněného domku. Termín osobní volno proto pro mě začal být něco zcela nedostižného. Připadalo mi, že když ale přestanu přípravám na vyučování věnovat tolik času, budu šidit žáky. Proto jsem kvůli nedostatku času musela mnoho svých studijních povinností odkládat. To mě však frustrovalo. Z magisterského studia jsem byla zvyklá mít vše co nejrychleji a nejlépe splněno. Jenže teď to nešlo, ač jsem se snažila sebevíc.

Postupem let, i když jsem byla schopna své povinnosti plnit čím dál rychleji, práce neubývalo. Naopak mi připadalo, že množství pracovních úkolů se jen stále více stupňuje. Toho, co jsem musela za krátký čas zvládnout, bylo čím dál více. (Budiž mi poučením, že práce, kterou jsem ve škole zastala, byla rozdělena po mém odchodu mezi několik lidí.) A nakonec i prázdniny se stávaly čím dál kratší na to, abych si stihla odpočinout. Poslední prázdniny před nástupem mých žáků do pátého ročníku jsem si už nestihla odpočinout vůbec. Absolvovala jsem zahraniční konferenci, Letní školu matematiky a do toho vrcholily přípravy na naši svatbu koncem léta.

V září jsem se snažila s úsměvem vítat žáky po prázdninách, ale v duchu jsem si říkala, kde vezmu sílu vydržet až do června. První pololetí pátého ročníku bylo utrpením. Připadalo mi, že se utápím v hromadě práce, kterou nikdy nejsem schopna zvládnout dodělat. A že čím více se snažím, tím více práce mi zase přibude. Se svými žáky jsem byla ráda, ale práce mě přestávala těšit. Navíc se u mě stále znásoboval pocit, že stále neučím tak, jak bych si představovala, a že nemám vůbec čas na to, abych pracovala i na svém profesním růstu kvůli plnění v podstatě malicherných záležitostí. Když jsem se cítila úplně nejhůře, naštěstí přišly vánoční svátky, během nichž se mi podařilo nastřádat alespoň trochu energie i motivace do další práce. Po Vánocích jsem ale znovu spadla do toho strašného koloběhu povinností a začala jsem cítit, že déle jak do června učit nezvládnu. Vůbec jsem si nedokázala představit, že budu muset v září začínat znovu s nějakou jinou třídou, když moji žáci odejdou na jiné školy (naše škola byla jen do pátého ročníku). Absolutně jsem ale netušila, jak se z tohoto koloběhu dostat ven. Několikrát jsem si říkala, že bych si tak přála od toho všeho utéct.

A najednou přišlo vysvobození v podobě malého pulzujícího srdíčka na ultrazvuku. Kromě směsi nejrůznějších pocitů, že uvnitř mě roste malý tvoreček a já budu máma, má první myšlenka byla, hurá, já už nemusím v září do školy.

Trochu jsem se obávala, že nástupem na mateřskou dovolenou a odstěhováním z Prahy již možná pro mě nebude možné dokončit doktorandské studium, ale nakonec opak se stal pravdou. Péčí o svého syna jsem si neuvěřitelně odpočinula, srovnala myšlenky a získala odstup. Měla jsem pocit, že oproti tomu, co jsem zažívala v předchozích letech, jsem nyní konečně na dovolené a užívala jsem si ji.

Dokončení studia i realizace disertační práce tak pro mě mnohdy bylo příjemným odreagováním od mateřských povinností. Sice jsem měla jen omezené množství času, když malý spinkal, ale zase jsem měla mnohem více prostoru si některé věci promýšlet. Nemálo analýz, interpretací myšlenek žáků a dalších nápadů vznikalo při procházkách s kočárkem, na něž jsem se naučila brát si poznámkový blok. A jelikož jsme se přistěhovali na malou vesnici, jistě si místní lidé, kteří mě potkávali, jak tlačím kočárek a zároveň píši, mysleli, co se to k nim z Prahy přistěhovalo za blázna.

Od doby, co jsem odešla z práce a nastoupila na mateřskou dovolenou, uplynulo více jak dva roky, ale až nyní se mi konečně začíná vracet chuť jít zase učit. K tomu výrazně přispělo psaní disertační práce. Provádění analýz mých videozáznamů, prohlížení prací získaných od žáků a konzultace s mým školitelem mi pomáhalo nacházet v mé práci učitele význam. Má práce učitelky tedy měla smysl a povedla se mi spousta věcí, které jsem v té době neviděla.

V současné době jsem rozhodnutá, že se do školství vrátím (pokud se mi tedy podaří najít pracovní místo). Uvědomuji si ale, že si budu muset dát velký pozor, abych se za pár let nedostala znovu do tak těžké situace, z jaké mě vysvobodilo až mateřství. Jako prevenci bych chtěla využít některá mé osobní poznatky, které jsem nabývala během zpracovávání práce.

Myslím si, že práce učitele je velice náročná i tím, že učitel jen velmi obtížně získává od svého okolí zpětnou vazbu, a když ji dostane, tak převážně tu negativní. Málokdo z rodičů přijde za učitelem ho pochválit, když je s jeho prací spokojen, ale většina se naštvaně přižene, pokud se jim něco nelíbí. (Uvědomuji si, že takto to funguje i obráceně. Učitelé také volají rodičům, až když žák něco provede. Zpočátku jsem proto kontaktovala rodiče i v případě, že se jejich dítěti něco významného podařilo. Mám pocit, že z toho byli ale spíše zaskočení a zmatení. Málokdo dokázal v tu chvíli být skutečně potěšen.)

Zpětnou vazbu by se proto učitel měl naučit číst od svých žáků, obzvláště pokud ji pro svou práci potřebuje tolik jako já. Pomocí zkušeností ze zpracovávání videozáznamů jsem si proto vytvořila pět vodítek, kterými jsem odhodlaná se ve své budoucí praxi řídit, abych napříště předešla mezní situaci naprostého vyčerpání ze své profese.

1. Snažit se zapisovat si objevy svých žáků, aby v době, kdy člověk začne váhat nad smyslem své práce, v nich mohl listovat a vidět, že vynaložená energie je někde vidět. V ideálních případě si vést pedagogický deník a archivovat zajímavé práce žáků.

2. Není pravda, že když neuzavřu hodinu vyřešením problému nebo tím, co jsem si naplánovala, ztratili jsme jen hromadu času, který mi na konci roku bude chybět pro zbývající látku.

3. I problémový a slabý žák má pro třídu svůj význam. Je tedy dobře, že ve třídě je.

4. Výrok žáka, který se zdá být zcela nesmyslný, může skrývat cenné myšlenky pro žáka i třídu. Jejich rozkrytí může umožnit lepší vhled do způsobu chápání problému konkrétního žáka.

5. Několikrát za školní rok je dobré pořídit si videozáznam svého vyučování pro posílení sebereflexe své práce. Jelikož si nemyslím, že během školního roku budu mít čas na nějaké hlubší analýzy těchto záznamů, vytvořila jsem si návrh několika otázek, na něž se při sledování videozáznamu mohu zaměřit pro posuzování své výuky.

- Mluvím méně než žáci?
- Nechávám žáky dokončit myšlenky?
- Má diskuze spád (tzn. žáci se aktivně zapojují a přinášejí nové myšlenky nebo jejich obměny)?
- Do kolika kontextů žáci řešený problém zapojují?
- Poslouchají se žáci navzájem?
- Navazují žáci na své myšlenky a dále je rozvíjejí?
- Nenapadají se slovně kvůli odlišnosti názorů?
- Zapojuje se do diskuze většina třídy? Co dělají ti, co se nezapojují?
- Rozpoutávají diskuze o problémech také žáci sami?
- Objevují se i pro mě nové myšlenky?
- Najdou se ve vyučování okamžiky, kdy má přítomnost ve třídě není důležitá a žáci pokračují dále v práci i bez mých zásahů?
- Pokračují žáci v řešení problému i po vyučování (např. dobrovolné dořešení doma, diskutování o problému s rodiči atd.)?

Po každém zhlédnutí videozáznamu se nedá na každou z otázek najít odpověď nebo odpovědět kladně. Přesto si ale myslím, že pokud většina těchto odpovědí bude kladná, mohu být se svou prací spokojena, mohu to brát pro sebe jako pochvalnou zpětnou vazbu, že učím tak, jak jsem si předsevzala, že tedy směřuji k zásadám VOBS.

Tak snad se mi podaří má předsevzetí naplnit a budu spokojená učitelka spokojených žáků.

8. Literatura

ANDERSON, R. C. a P. D. PEARSON. *A Schema-Theoretic View of Basic Processes in Reading Comprehension.* Technical Report No. 306. Cambridge Mass.: Bolt, Beranek and Newman, Inc.; Urbana – Champaigne: University of Illinois. Center for the study of Reading, 1984.

ANDERSON, R. C*. Cognitive psychology and its implications.* 2. vyd. New York: W. H. Freeman, 1985.

BARROW, J. D. *Pí na nebesích: o počítání, myšlení a bytí.* Praha: Mladá fronta, 2000. ISBN 80-204-0855-X.

BARTLETT, F. C. *Remembering: A study in experimental and social psychology.* New York: Cambridge University Press, 1932.

BREWER, W. F. a J. C. TREYENS. Role of schemata in memory for places. *Cognitive Psychology*, Volume 13, Issue 2, 1981, s. 207-230.

BROUSSEAU, G. *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970-1990*. Edited and translated by N. Balacheff (et. al). New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. ISBN 03-064-7211-2.

BROUSSEAU, G. a J. NOVOTNÁ (ed.). *Úvod do teorie didaktických situací v matematice.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-600-0.

CACHOVÁ J. a N. STEHLÍKOVÁ. *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe.* Studijní materiál k projektu: Operační program Rozvoj lidských zdrojů. Č. projektu: CZ.04.1.03/3.1.15.1/0237. Praha: JČMF, 2006.

COLLINS, A. M. a M. R. QUILLIAN. Retrieval Time from Semantic Memory. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behaviour*, č. 8, 1969, s. 240-247. Dostupné z: http://matt.colorado.edu/teaching/categories/cq69.pdf

DAVID, M. M. a M. P. LOPES. Students-Teacher Interactions and Development of Students´ Mathematical Thinking. In: GOODCHILD, S. a L. ENGLISH (Eds.) *Researching Mathematics Classrooms: a Critical Examination of Methodology.* Westport, Conn.: Praeger, 2002, s. 11-38. ISBN 15-675-0666-6.

DAVIS, R. B., MAHER, C. A. a N. NODDINGS. Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education: Monograph No. 4*. 1990.
Dostupné z: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994a-gray-jrme.pdf

DUBINSKY, E. a M. A. MCDONALD. *APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research.* [online]. s. 1-22 [cit. 2013-09-02]. Dostupné z: http://www.math.kent.edu/~edd/ICMIPaper.pdf

FISHER, R. *Učíme děti myslet a učit se: praktický průvodce strategiemi vyučování*. Vyd. 3. Praha: Portál, 2011. ISBN 978-80-262-0043-7.

FISCHBEIN, E. a A. GROSSMAN. Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*. 1997, č. 34, s. 27-47.

FISCHBEIN, E. Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*. 1999, č. 38, s. 11-50.

GAVORA, P. *Učitel a žáci v komunikaci*. Brno: Paido, 2005. ISBN 80-731-5104-9.

GAVORA, P. *Úvod do pedagogického výzkumu*. 2., rozš. české vyd. Brno: Paido, 2010. ISBN 978-80-7315-185-0.

GERRIG, R. J. Text comprehension. In STERNBERG, R. J a E. E. SMITH. *The Psychology of human thought*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991, s. 242-266.

GOLDIN, G. Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. In: ENGLISH, L. D. (ed.). *Handbook of international research in mathematics education*. London and New York: Routledge, 2014, s. 197-219.

GRAY, E. M. a D. O. TALL. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education.* 1994, roč. 26, č. 2, s. 115-141.

HEAD, H. *Studies in Neurology.* 2. vyd. London: Oxford Medical Publication, 1920.

HEJNÝ, M. Budování matematických schémat. In: HOŠPESOVÁ, A., N. STEHLÍKOVÁ a M. TICHÁ. *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 81-121. ISBN 978-80-7394-052-2.

HEJNÝ, M. *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-080-1344-3.

HEJNÝ, M. Schéma – pilíř matematické znalosti. In HEJNÝ, M., KVASZ, L., VAGASKÝ, M. *Pytagoras 2007*. Zborník príspevkov, Bratislava: p-Mat, n.o. Bratislava, 2008a, s. 3-17.

HEJNÝ, M. Scheme - oriented educational strategy in Mathematics. In MAJ, B., PYTLAK, M., SWOBODA. E. *Supporting Independent Thinking Through Mathematical Education*. Proceedings of CME 08 Konference, Rzeszow: Nawa Era, 2008b, s. 40-48.

HEJNÝ, M. a Fr. KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, M. *The process of discovery in teaching focusing on building schemes.* In NOVOTNÁ, J. a H. MORAOVÁ, SEMT 11 – International Symposium Elementary Maths Teaching. Proceedings. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2011.

HEJNÝ, M. Exploring the Cognitive Dimension of Teaching Mathematics through Scheme-oriented Approach to Education. In: VONDROVÁ, N. (ed.) *Orbis Scholae*. Praha: Charles university in Prague, Faculty of Education, 2012, 6 (2), s. 41-55.

HEJNÝ, M. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

HEJNÝ, M., D. JIROTKOVÁ a J. SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika: pro 1. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2007, 3 sv. ISBN 978-80-7238-626-0.

HEJNÝ, M., D. JIROTKOVÁ a J. SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2008, 4 sv. ISBN 978-80-7238-768-7.

HEJNÝ, M., D. JIROTKOVÁ, J. SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a J. MICHNOVÁ. *Matematika: pro 3. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2009, 4 sv. ISBN 978-80-7238-824-0.

HEJNÝ, M., D. JIROTKOVÁ a E. BOMEROVÁ *Matematika: pro 4. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2010, 4 sv. ISBN 978-80-7238-940-7.

HEJNÝ, M., D. JIROTKOVÁ, E. BOMEROVÁ a J. MICHNOVÁ. *Matematika: pro 5. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2011, 4 sv. ISBN 978-80-7238-966-7.

HEJNÝ, M., D. JIROTKOVÁ a J. SLEZÁKOVÁ. Reversible and irreversible desemantisation. In: *Proceedings of CERME 9*. 2015. Dostupné z https://www.dropbox.com/sh/8ybnhniqp2r5zm7/AAAu3bVgoEM3ySN7ekEfg3xUa/CERME9_TWG2_Hejny_Jirotkova_Slezakova_v2.pdf?dl=0.

HEJNÝ, V. *Archív Víta Hejného.* In: BACHRATÝ a kol. (Eds.). Žilina: EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2012.

HERSHKOWITZ, S. a P. NESHER. *The Role of Schemes in Solving Word Problems.* The Mathematics Educator. 2003, roč. 7, č. 2, s. 1-24.

HERSHKOWITZ, S. Intuitions, schema, and problem solving. In: NOVOTNÁ, J., a H. MORAOVÁ, SEMT 09 - *International Symposium Elementary Maths Teaching. Proceedings.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2009.

HOLT, J. *Proč děti neprospívají.* 2. vyd., (V nakl. Stehlík 1.), Volary: Stehlík, 2003.

HUTTON, CH. *A mathematical and philosophical dictionary: containing an explanation of the terms, and an account of the several subjects, comprized under the heads mathematics, astronomy, and philosophy both natural and experimental, Svazek 1*. London, 1795. Dostupné také z: http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:2B3W5VN7

CHALOUPKOVÁ, S,. *Úlohy s antisignálem pro žáky 1. stupně ZŠ.* Praha, 2009. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce M. Hejný.

CHALOUPKOVÁ, S. Prostředí Krokování a Schody podle učebnic pro 1. stupeň ZŠ nakladatelství Fraus. In: STEHLÍKOVÁ, N. a L. TEJKALOVÁ. *Dva dny s didaktikou matematiky 2010. Sborník příspěvků*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2010, s. 100-105.

CHEVALLARD, Y. On didactic transposition theory: Some introductory notes. In: *International Symposium on Research and Development in Mathematics, Bratislava, Czechoslavakia*. 1988. Dostupné z: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/On_Didactic_Transposition_Theory.pdf

JANÍK, T. Akční výzkum jako cesta ke zkvalitňování pedagogické praxe. In: MAŇÁK, J. a V. ŠVEC (Eds.). *Cesty pedagogického výzkumu.* Brno: Paido, 2004, s. 51-68.

JAWORSKI, B. Mathematics Teacher Research: Process, Practice and the Development of Teaching. *Journal of Mathematics Teacher education*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1998, **1**, s. 3-31.

JIROTKOVÁ, D. Budování konceptuálních představ čísla u dětí ve věku 5 - 8 let. In: LÁVIČKA, M., B. BASTL a M. AUSBERGOVÁ. *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2006, s. 143-151.

JIROTKOVÁ, D. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie: výzkumný záměr Učitelská profese v měnících se požadavcích na vzdělávání*. Vyd. 2. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-552-2.

KOFFKA, K. *Principles of gestalt psychology.* London: Kegan Paul, 1935.

KUŘINA, Fr. O matematice a jejím vyučování. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, roč. 31, č. 1, 2002a.

KUŘINA, Fr. Realismus konstruktivních přístupů k vyučování matematice. *Disputationes Scientificae Universitatis Catholicae in Ružomberok*, roč. 2, č. 1, 2002b.

LOFTUS, E. F. a J. C. PALMER. *Reconstruction of Automobile Destruction: An Example of the Interaction Between Language and Memory. Journal of Verbal Learning and Verbal Behaviour.* 1974, č. 13, s. 585-589. Dostupné z: https://webfiles.uci.edu/eloftus/LoftusPalmer74.pdf

MAREŠ, J. a J. KŘIVOHLAVÝ. *Komunikace ve škole*. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1070-3.

MAREŠ, M. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd.* 2., rev. vyd. Příbram: Pistorius a Olšanská, 2011. ISBN 978-80-87053-64-5.

MINSKY, M. L. *The society of mind.* New York: Simon and Schuster, 1986.

NEZVALOVÁ, D. Akční výzkum ve škole. *Pedagogika*. 2003, LIII, 3, s. 300-308.

NOVOTNÁ, J. a A. HOŠPESOVÁ. What is the price of Topaze? In: WOO, J. H., H. C LEW, K. S. PARK a D. Y. SEO (eds.). *PME: Proceedings of the 31st. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4. Seoul, 2007, s. 25-32.

NOVOTNÁ, J. a L. TEJKALOVÁ. Aktivity pro rozvoj komunikace v matematice. In: VONDROVÁ, N. (Ed.) *Dva dny s didaktikou matematiky 2012. Sborník příspěvků.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-604-8

NOVOTNÁ, J., A. PELANTOVÁ, H. HRABÁKOVÁ a M. KRÁTKÁ. Příprava výukových situací. In: KRÁTKÁ, M. (ed.). *Jak učit matematice žáky ve věku 11-15 let: Sborník příspěvků celostátní konference*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2006a, s. 151-175. ISBN 80-86843-08-4.

NOVOTNÁ, J., A. PELANTOVÁ, H. HRABÁKOVÁ a M. KRÁTKÁ. *Příprava a analýza didaktických situací.* Studijní materiál k projektu: Podíl učitele ZŠ na tvorbě ŠVP. Blok D02. Č. projektu: CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137. Praha: JČMF, 2006b.

PECLINOVSKÁ, S. Setkání s nulou. In: VONDROVÁ, N. (ed.). *Dva dny s didaktikou matematiky 2013. Sborník příspěvků.* Plzeň: vydavatelský servis, 2013, s. 73-75. ISBN 978-80-86843-44-5.

PIAGET, J. a B. INHELDER. *Psychologie dítěte*. 2. vyd. Praha: Portál, 1997.

PIAGET, J. *Psychologie inteligence*. 2. vyd. Praha: Portál, 1999.

PLHÁKOVÁ, A. *Dějiny psychologie.* Praha: Grada, 2006.

PRŮCHA, J., WALTEROVÁ E. a J. MAREŠ. *Pedagogický slovník*. 7., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2013. ISBN 978-80-262-0403-9.

RITTENHOUSE, P. S. The teacher´s Role in Mathematical Conversation: Stepping In and Stepping Out. In: LAMPERT, M. a M. L. BLUNK (Eds.). *Talking Mathematics in School: Studies of Teaching and Learning.* Cambridge: Cambridge University Press, 1998, s. 163-189. ISBN 05-216-2136-4.

SACCHERI, G. *Euclid vindicated from every blemish.*. Switzerland: Springer International Publishing, 2014. ISBN 978-331-9059-655.

SEIFE, Ch. *Nula: životopis jedné nebezpečné myšlenky.* Praha: Argo, 2005. ISBN 80-736-3048-6.

SEMADENI, Z. Określoność symbolu 0^0 i ogólna kwestia przypadków brzegowych pojęć matematycznych. In: *Didactica Mathematicae*. Warszawa: Uniwersytet Warszawski, Instytut Matematyki, 2006, 29, s. 251-283.

SHANK, R. C. a R. P. ABELSON. *Scripts, Plans, Goals, and Understanding: An Inquiry into Human Knowledge Structures.* Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1977.

SIERPINSKA, A. Some Remarks on Understanding in Mathematics. In: *For the Learning of Mathematics*. Montreal, Quebec, Canada: FLM Publishing Association, 1990, 10 (3). s. 24-36.

SLEZÁKOVÁ, J. Budování procesuálních představ čísla u dítěte ve věku 5 – 8 let. In: LÁVIČKA, M., B. BASTL a M. AUSBERGOVÁ. *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2006, s. 253-259.

SLEZÁKOVÁ, J. Prostředí Krokování. In: HOŠPESOVÁ, A., N. STEHLÍKOVÁ a M. TICHÁ. *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 123-142. ISBN 978-80-7394-052-2.

SPILKOVÁ, Vl. *Proměny primárního vzdělávání v ČR*. Praha: Portál, 2005. Pedagogická praxe. ISBN 80-717-8942-9.

STEHLÍKOVÁ, N. Some observed phenomena of pupils' abilities to structure and restructure mathematical knowledge during specific mathematical tasks. In: HEJNÝ, M. a J. NOVOTNÁ. *Proceedings International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT 99.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 1999, s. 167-171. ISBN: 80-86039-86-2.

STEHLÍKOVÁ, N. Analýza písemného řešení žáka, jedna z možných technologií. In: NOVOTNÁ, J. *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2000, s. 98-117.

STEHLÍKOVÁ, N. Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. In: KRÁTKÁ, M. (ed.). *Jak učit matematice žáky ve věku 11-15 let: Sborník příspěvků celostátní konference*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2006, s. 29-38.

ŠEĎOVÁ, K., ŠVAŘÍČEK R. a Z. ŠALAMOUNOVÁ. *Komunikace ve školní třídě*. Praha: Portál, 2012. ISBN 978-80-262-0085-7.

ŠTECH, S. *Škola stále nová: Freinetova "moderní škola" : MCE - hnutí pedagogické kooperace : GFEN - Francouzská skupina Nové výchovy*. Praha: Karolinum, 1992. ISBN 80-706-6673-0.

TOMKOVÁ, Anna. *Program Čtením a psaním ke kritickému myšlení v primární škole: distanční text*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2007. ISBN 978-80-7290-315-3.

TONUCCI, F. *Vyučovat nebo naučit?*. Vyd. 2. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 1994. Informační bulletiny.

TSAMIR, P. a R. SHEFFER. Concrete and Formal Arguments: The Case of Division by Zero. In: *Mathematics Education Research Journal*. 2000, 12(2), s. 92-106.

VERGNAUD, G. Towards a Cognitive Theory of Practice. In: SIERPINSKA, A. a J. KILPATRICK. *Mathematics Education as a Research domain: A search for Identity*. Great Britain: Kluwer Academic Publishers, 1998, s. 227-240.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*. 2009, roč. 52, č. 2, s. 83-94. Dostupné z: http://www.each.usp.br/cmapping/iiciclo/artigo-marco.pdf

VOPĚNKA, P. *Rozpravy s geometrií.* Praha: Panorama, 1989. ISBN 80-703-8031-4.

VYGOTSKIJ, L. S. *Myšlení a řeč.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971.

WITTMANN, E. Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics Education*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001, 48, s. 1-20.

ŽALSKÁ, J. Proč se (stále) dělí nulou. In: N. VONDROVÁ (ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2012. Sborník příspěvků*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012, s. 196-203. ISBN 978-80-7290-640-8

9. Přílohy

9.1. Příloha 1: Protokol diskuze DI

Protokol zachycuje 20 minut z diskuze, která probíhala ve druhé polovině vyučovací hodiny.

Jde o přepis audiozáznamu pořízeného diktafonem. Při nahrávání byl diktafon položen na katedře v rohu třídy, a proto občas nebylo možné některé argumenty žáků přesně rozlišit a některé se ztrácejí úplně. (Především těch žáků, kteří byli v daném úseku záznamu od diktafonu nejdále.) Přepis některých vstupů žáků je tedy neúplný a části, kterým nebylo možné rozumět, jsou označeny.

Komplikace při přepisu záznamu způsobovala též živelnost diskuze. Místy se intenzita diskuze stupňovala až do té míry, že se vstupy jednotlivých žáků v záznamu začaly překrývat a ztrácet se v šumu třídy. Takovéto okamžiky jsou v protokolu zapisovány jako „Šum třídy“. Zároveň též, i když jsou vstupy žáků v protokolu psány za sebou, často mnohé z nich probíhaly téměř současně.

Levý sloupec tabulky je přepisem záznamu, který je případně ještě doplněn informacemi o intonaci daného vstupu. Pravý sloupec tabulky přináší na několika místech další doplňující komentáře k dění ve třídě.

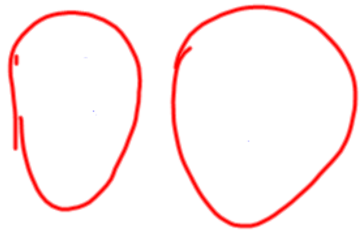
Šum třídy.	
001 Nela: Máš nula. Takže to musí být nula, nula a nula.	
002 Bořek: Dyť jo.	
003 Ema: To je divný ale.	
004 Uč[83].: Tak jak to s tou nulou je? Je sudá nebo není sudá?	
005 Ondra: Je sudá.	
006 Marek: Je sudá.	
007 Několik hlasů: Lichá.	*Zbytek třídy splývá.*
008 Vojta: Když máš fotbalovej zápas, je to nula, nula. Je to stejný?	

[83] Vstupy učitelky jsou zkráceně označeny „Uč.“ a zvýrazněny tučně.

009 Ema: Jo, je.	
010 Vojta: Takže to, takže to můžeš mít. (*V hlase je patrná nejistota.*)	
011 Andrea: Ale fotbal je...[84] *(v intonaci je jasné projevení nesouhlasu).*	Rychlým vstupem Marka (012) nedostává prostor svou myšlenku zformulovat.
012 Marek: Když se pere nula ...	Vstup dokončen ve vstupu 014.
013 Andrea: Jako když je...	
014 Marek: S nulou, tak jsou, tak jsou dvě a ne tři.	
015 Třída: *Ticho (Θ)[85]. Smích.*	
Šum třídy. (Rozeznatelné jsou pouze hlasy Šimona a Vojty, nikoliv však jejich vstupy.)	
016 Uč.: Takže platí tohle.	
017 Lenka: Můžeš, protože nula nic neni.	
018 Ema: No.	
019 Marek: Tady je nula.	
020 Matěj: Nic je prostě nic. *(Zbytek není rozumět.)*	
Šum třídy.	
021 Učitel: Takže nulu mám tady napsat pod sudá čísla nebo pod lichá?	Na tabuli jsou napsané dva sloupce čísel. V jednom jsou čísla sudá, ve druhém lichá. Hledáme do jakého sloupce nulu zapsat.
022 Matěj, Šimon *(a další hlasy)*: Lichá. *(Další hlasy se ztrácejí v šumu třídy.)*	V tuto chvíli se podle záznamu zdá, že hlasy pod lichá převažují.
023 Lenka: Pani učitelko.	Snaží se získat slovo.
024 Uč.: Tak kdo si myslí, že jsou to sudý? ***(Θ)*** **A kdo si myslí, že je to lichý?**	
025 Andrea: Pani učitelko.	

[84] Tři tečky v přepisu znamenají, že následující žák skočil danému žákovi do řeči a přerušil tak jeho řeč.
[85] Pauza od jedné do tří vteřin je označena řeckým písmenem théta (Θ). Pauza větší než tři vteřiny je označena (ΘΘ).

026 Marek: Já si myslím sudý.	
027 Ema, Lenka a někteří další: Není to sudý.	
Nerozlišitelné dohady mezi žáky, zda sudý, nebo lichý.	
028 Lenka: Lichý a sudý...	Intonace napovídá, že chce znovu vymezit pojmy sudý a lichý.
Šum třídy.	
029 Uč.: Moment, ale ...	
030 Andrea: Jak se to může rozdělit na nula a nula? To je k ničemu.	
Šum třídy. (Zaznamenatelný je pouze Matěj, který souhlasí s Andreou, ale jeho argument nelze rozlišit.)	
031 Uč.: Ehm. Když se takhle dohadujete, tak nikdo už pak neslyší žádný argument. Měli bysme se střídat. Jo, ne na sebe takhle ječet. Tak, Vojto.	
032 Vojta: Akorát, že ehm jako lichý číslo se taky dá rozdělit, ale ne na dvě stejný části, na tři a dva třeba.	Má na mysli číslo 5 napsané ve sloupci „lichá čísla“ na tabuli.
033 Uč.: A ty seš teda pro co? Pro jaký názor?	
034 Vojta: Pro sudý.	
035 Někdo: No dyť.	
036 Marek: Pani učitelko, mohu jít? *(Θ)* Pani učitelko, ale v desítce je taky nula a je to sudý.	
037 Uč: No, mě neargumentuj.	
038 Vojta: No, ale tam je, tam je ještě ta jednička.	
039 Matěj: No, pani učitelko.	Snaží se získat slovo. Způsob intonace „no“ napovídá, že s argumentem Marka nesouhlasí.
040 Nela: A ta je lichá.	

041 Ema: No, že jo.	
042 Andrea: Ale...	
043 Šimon: Ale musí se to střídat, že jo.	.
044 Marek: Ale ta nula je sudá.	
045 Uč.: Marku.	
046 Marek: Mohu to jít nakreslit?	
047 Uč.: No.	Marek jde k tabuli.
048 Marek: Takže, jak to dělá návazně vlast *(nedořekne) (Θ).* Máš dva pytlíky.	Kreslí na tabuli pytlíky: 
049 Vojta: V žádným není nic.	
050 Marek: V žádným je nula. Ehm. V obou je nula. Mám stejně?	
051 Ondra: Jo.	
052 Třída: Jo.	
053 Andrea: Nemáš.	
054 Třída *(Rozčíleně. Hlavně je slyšet Ema)*: Máš /Má.	
055 Andrea: Ale každej pytlík může bejt jinak velkej.	
Šum třídy. (Rozhořčené hlasy se snaží Báře protiargumentovat.	Rozhořčení z Andrejina výroku (055) je tak velké, že každý chce něco říci.
056 Vojta: Ale furt je pořád prázdnej.	Ve změti všech rozčílených hlasů rozlišitelný pouze Vojta
Šum třídy (rozčílení).	
057 Marek: Ale Nováková	Oslovuje Andreu příjmením.

058 Uč.: Co jsem řekla o tom hlášení?	
059 Marek: Ať jsou velký. Můžu mít takovejhle a takovejhle...	
060 Matěj: Ale nic nemám, tak je to vyřešený.	
061 Ondra: Ale pořád jsou to pytlíky.	
062 Marek: Oba jsou sice jinak velký, ale je v obou stejně bonbonů.	
063 Lenka: No.	
064 Matěj: Ale vždyť tam žádný bonbon neni.	
Šum třídy.	
065 Marek: No právě v tom to je, že když mám nula a nula, tak v tom je to stejný.	
066 Šimon: Ale jak poznáš, že je to stejný?	
Šum třídy.	
067 Uč.: Ale jak tím dokazuješ, lichý a sudý čísla? ***(Θ)*** **Jak to souvisí?** ***(Θ)*** **Dokazuješ, jseš teda pro, že nula je lichý nebo sudý číslo?**	
068 Marek: Sudý.	
069 Matěj: Ale to je hloupost. Ale...	
070 Marek: Na co rozdělíš? *(Θ)* Tady máš jeden pytlík. *(Θ)* Máš nulu. Na co to rozdělíš?	Otázka položená celé třídě.
071 Vojta: Na nula a nula.	
072 Andrea: Na nic *(silná, agresivní intonace),* nula a nula *(najednou výrazná nejistota, která oslabuje sílu hlasu až do té míry, že poslední hlásky zanikají).*	
Šum třídy. (Ozývají se slova nula a nic.)	
073 Andrea: Na nic.	
074 Marek: Na nic a nic a nic a nic. Můžeš to rozdělit třeba na milion kousků.	

Šum třídy. (Andrea se snaží překřičet Marka i zbytek třídy.)	
075 Andrea: Ale nula nejde na vůbec nic rozdělit.	
076 Uč.: Hele, ehm trošku uberte v tom hádání.	
077 Marek: Jde.	
Šum třídy. (V pozadí je slyšet Nela, Marek.)	
078 Matěj: Ale nula je nic, nic, a to přece neexistuje.	
Šum třídy.	
079 Uč.: Tak Marku, posaď se. Děkujeme.	
080 Uč.: Vojta.	
081 Vojta: Ale ehm...	
082 Uč.: Haló!	Uklidňování třídy.
083 Vojta: Ale nám totiž jde přeci o ten obsah. *(Θ)* Takže když tam udělám do toho jeden bonbon *(Θ)* a do druhýho nic, tak se to nedá rozdělit.	
084 Uč.: A má smysl nic dělit?	
085 Někdo: Nemá.	
086 Vojta: No, pani učitelko, ale tím se zjistí jako, jestli je to to, protože jde o velikost toho pytlíku, pořád je v něm nic a tím pádem je to pořád stejný jako to druhý, takže je to vyrovnaný.	
087 Petr: Ale stejně jsou ty pytlíky pořád stejně velký.	Do diskuze se zapojuje žák, který zatím neměl žádný vstup.
088 Uč.: Hm. Lenko?	
089 Lenka: Takže jak máme od jedničky čísla za sebou, tak je to vždycky sudý, lichý, sudý, lichý. Ale kdyby byly dvě za sebou lichý, tak už by to nebylo jakoby to *(odmlčí se).*	

090 Ema: Střídání.	.
091 Lenka: No, střídání.	
092 Uč.: Takže ty jsi pro, že nula musí být sudá, protože jednička už je lichá.	
093 Lenka: No.	
094 Uč.: Aby se to střídalo.	
095 Šimon: To máš jedna, mínus jedna, mínus jedna, to je oboje lichý, že jo.	
096 Matěj: Ale *(nedokončuje výpověď).*	
097 Vojta: No.	
098 Šimon: No dyť právě.	Nesouhlasí.
Šum třídy.	
099 Uč.: A Šimon s tím souhlasí, co říkala Lenka? Šimone?	
Šum třídy. (Opět se rozpoutá diskuze. Šimon zřejmě odpovídá, že nesouhlasí. V pozadí je pravděpodobně slyšet Pavel, jak říká, že nula nemůže být sudá).	
100 Uč.: Moment, holky, posloucháme. No.	
101 Šimon: Pani učitelko, to je jako, když vezmu flašku s vodou a všechno by bylo vypitý, tak to to, *(Θ)* prostě tu úplně prázdnou flašku nemůžu nějak rozdělit.	
102 Bořek: Můžeš rozdělit flašku.	
103 Šimon: Jenomže tady jde o ten obsah, ne o tu flašku.	
104 Matěj: Ale to není nic tahleta flaška.	
105 Andrea: No právě.	
106 Petr: Jo, ale stejně třeba by si v ní měl to nula.	
107 Matěj: Ale nula je jakoby nic.	
108 Marek: Mohu ještě něco říct?	

109 Matěj: A nic prostě je nic. A to nic, to se nedá dělit. Ale ty by si dokázal rozdělit nulu?	
110 Marek: To jde.	
111 Uč.: Takže podle tebe Matěji, když to rozdělit nejde, tak je to lichý číslo?	
112 Matěj: Ne, pani učitelko, to není ani jedno, protože nula je prostě nic.	
113 Lenka: Ne, ale, pani učitelko.	
114 Uč.: Takže ty si myslíš, že nula není ani lichý ani sudý.	
115 Matěj: Ne, to je prostě nic.	
116 Vojta: *(Začátek není rozumět)*, když to není nic, je to nekonečný číslo*. (Oproti první části věty říká „nekonečný číslo" výrazněji).*	
117 Uč.: Takže chápu to správně, ty si myslíš, že u nuly bychom to určovat vůbec neměli.	
118 Uč.: Hm. Dobrý. Skvělý názor.	
119 Marek: No, to s tebou souhlasím asi teda.	
120 Uč.: Kdo by s Matějem souhlasil?	
121 Vojta: Jo, asi tak středně.	
122 Uč.: Jeden.	
123 Ondra: Já nevim, já možná jo.	.
124 Uč.: Dva. Tří.	
125 Uč.: Kdo je tak jako na půl?	
126 Lenka: Ne, pani učitelko, vůbec.	
127 Ondra: Já tak trochu.	
Šum třídy.	
128 Uč.: Kdo by s tím vůbec nesouhlasil, že to není možný?	
129 Uč.: To je vás většina.	
130 Andrea: Pani učitelko, je to možný.	
131 Uč.: Báro, ještě nemáš slovo. Martino.	

132 Martina: Když mám prostě *(Θ),* jako mám nahoru, od nuly mám nahoru a pak mám ještě dolu, tak vlastně *(Θ)* to je jednička, je ta nahoře.	Jde k tabuli, ale nic nepíše.
133 Uč.: Klidně udělej osu a k ní to nakresli.	
(ΘΘ)	
134 Ondra: Paní učitelko, ale nula je číslo jakoby.	
135 Vojta: No, dyť jo právě.	
136 Matěj: Ale pani učitelko, ono *(dále není rozumět).*	
Šum třídy.	
137 Uč.: Matěji, ale teď má slovo jenom jeden, jo?	
Diskuze malých skupin žáků (v pozadí slyšet Pavel a Vojta).	
138 Martina: Tak tady je nula.	Nakreslila na tabuli svislou čáru jako číselnou osu a jako první vyznačuje nulu.
139 Uč.: Ono to píše trošku jinde, toho si nevšímej.	V tuto chvíli interaktivní tabule nefunguje dobře, a dělá záznam jinde, než Martina píše.
Diskuze malých skupin žáků.	
140 Uč.: Martina má teďka slovo.	
141 Matěj: No, a je tam ještě nic z ničeho a je to nic. To jim nevysvětlíš.	Zřejmě útržek individuální diskuze mezi Šimonem a Matějem. Vstup Šimona bohužel není v protokolu zaznamenán.
142 Marek: Jenomže nula není nic.	
143 Uč.: Martino, ta úprava je v podstatě jedno.	Martinu znervózňuje, že tabule píše jinde, než se dotýká a obrázek působí neupraveně.

144 Martina: No prostě a tady mám jedničku.	Chce na číselnou osu dát další číslo.
Šum třídy. (Matěj polohlasně ještě něco dovysvětluje.)	
145 Uč.: Martino, teď nevidíme.	
Ve třídě je ticho (20s.)	*Jdu za Martinou k tabuli pomoct jí řešit technický problém s tabulí. Nejde již psát vůbec.*
146 Martina: A tady mám nulu *(Θ),* a pak když tady mám zase mínus. *(ΘΘ)* No a tady mám vlastně, ta nula by měla bejt jako sudá, protože tady mám jedničku, ta je lichá, ta nejde rozdělit, pak dvojka, ta je sudá, že jo. A tady ta mínus jednička, ta taky nejde rozdělit, to je vlastně jako... *(dále není rozumět).*	Martina dokreslila číselnou osu a své schéma vysvětluje. Obrázek z tabule: 
147 Marek: *(Skočí jí do řeči.)* Záporné číslo.	
148 Ema: No právě.	
149 Martina: Takže je to úplně to samý. Takže je to prostě lichý, sudý, lichý, sudý, to je vlastně *(zbytek není rozumět).*	
Šum třídy.	
150 Uč.: Tak já jsem teď ale Martinu neslyšela. Martino, ty si teda myslíš, že sudý ehm nula je sudý nebo lichý?	
151 Martina.: Sudý.	
152 Bořek: Sudolichá *(intonačně nejisté, slyšet jen v pozadí).*	

153 Uč.: A důvod? Bořku, Martina má slovo.	
154 Martina: Protože, jak říkala Lenka, tak se to střídá. Protože to by bylo trošku divný, kdyby byly, takhle by musely bejt tři vedle sebe stejný. To by bylo třeba, já nevim...	
155 Uč.: A hele pasovala by ti do toho ta teorie, že vlastně u nuly to určit nejde, že to je jako nějaký přechod.	
Šum třídy. (Žáci diskutují, jestli to je, nebo není přechod. Většině se to nezdá, Matěj zřejmě souhlasí).	
156 Uč.: Matěji?	
157 Martina: Ale stejně to můžeš rozdělit...	
Šum třídy.	
158 Uč.: Pšt.	
159 Martina: Že to máš jako jednu, *(Θ)* pak to můžeš rozdělit na dvě nic, jakoby, chápeš?	
160 Andrea: No jo, ale.	
161 Uč.: Matěji, ty jsi ještě před tím nějaký argument měl ještě.	
162 Matěj: No, pani učitelko, já jsem se chtěl zeptat, a co si myslíte vy?	
163 Uč.: Ne, předtím ještě co jsi myslel?	
164 Lenka: S tím přechodem *(napovídá mu, co má učitelka na mysli).*	
165 Matěj: Jo. *(Není rozumět)*, to je jakoby z toho ničeho a bylo to nic. To se nedá nějak rozdělit. To je jako já nevím, jak to říct. To je nic, a to nic se nedá rozdělit a nula je to nic.	
166 Uč.: Hm.	
167 Martina: Ale to je jako, když máš vzduch, tak to jako taky neni nic.	

168 Martina: A stejně ho rozdělíš. Třeba já nevim, můžeš ho rozdělit ...	
Šum třídy. (Slyšet Vojta, jak proti tomu něco namítá.)	
169 Andrea: Ale jak můžeš chytit vzduch do ruky?	
Šum třídy.	
170 Uč.: Halo. Halo. Jeden mluví.	
171 Martina: Že prostě jako mám třeba krabici ňákou skleněnou a tu prostě, v tý mám taky vzduch, že jo, ale pak když nějaký akvárko, a když tam dám hm prostě takovou tu přepážku, nebo co, zavřu to, tak mám prostě vzduch ve dvou, jako že rozdělený.	
172 Ema (možná i Lenka): No.	
173 Někdo: Jo.	
174 Uč.: Martino, děkuju.	
175 Pavel: Pani učitelko.	
176 Uč.: Tak Luboš ještě pak něco chtěl. A kdo ještě nedostal slovo?	
177 Ondra: Já vůbec.	
178 Pavel: Já vůbec.	
179 Ondra: Já jsem neřek ani ň.	
180 Uč.: Nelo.	
181 Nela: Já jenom, jak tady Matěj říkal, že tady, že si jako myslí, že ta nula je nic...	
182 Bořek: Blbost.	
183 Nela: Takže když třeba napíšu sto...	
184 Luboš: Nemusí bejt nic.	První jeho vstup protokolu. Doposud se zřejmě pouze hlásil o slovo, jak naznačuje i vstup 176.
185 Nela: Sto. Takže když nula je nic, tak tím pádem sto je jedna.	

186 Hlasy ze třídy: No.	
187 Ema: No, takže, Matěji, to nemůžeš.	
188 Hlasy třídy: To nemůžeš.	
189 Šimon: Ale sto...	
190 Andrea: Ano, ale...	
191 Ondra: Je to číslo, takže to nic neni.	
192 Vojta: No, tím pádem nula je taky číslo.	
193 Matěj: Ne.	
194 Šimon: Ale sto rozdělíš na padesát a na padesát. *(Z intonace je patrné, že výrok chápe jako protiargument k 192).*	
Šum třídy.	
195 Ema: Matěj říkal, že to nula není číslo.	
Šum třídy.	
196 Někdo: No.	
197 Ondra: Ale ono to je číslo.	
Šum třídy.	
198 Někdo: To rozdělíš na nulu a nulu.	
199 Ema: Nula je právě číslo, ale on říká, že neni.	
Šum třídy.	
200 Uč.: Vojto.	
201 Tadeáš: Akorát, že...	
202 Andrea: Ano ale před tou nulou není, *(Θ)* před tím nic, ani za tím nic.	
203 Uč.: Nelo, děkuji za názor.	

204 Vojta: Akorát že v těch pytlíčcích může být třeba šest bonbonů a tadyhle může být taky šest a pořád jich je tam stejnej obsah, jako když tam bylo nula a nula, akorát že, akorát že je to to, to je úplně stejný, akorát že, akorát že ehm, akorát že tam těch bonbonů bude víc, ale pořád je to to stejný, jako by kdyby tam byla nula a nula, jako kdyby tam nebylo nic.	Do pytlíků, které na tabuli zakreslil dříve Marek, vpisuje šestky: 
205 Šimon: Jenže to máš jako dvakrát nic, že jo.	
206 Andrea: To máš zrovna dvakrát víc peněz.	
207 Šimon: To máš dvakrát nulu.	
208 Vojta: Akorát že, akorát že, to je jakoby *(Θ)*, kdyby tady byla nula a nula, tak je to taky stejný, že jo, *(Θ)* takže je to sudý. Protože, když tady máš jedna a jedna, tak je to taky stejný, že jo, takže je to dva.	
Šum třídy.	
209 Uč.: Hele, poslouchejte se navzájem.	
210 Vojta: Takže jakoby nula a nula rovná se nula, takže to musí bejt jakoby, nula se dá rozdělit.	
211 Uč.: Děkujem za názor. Pavel ještě nebyl.	
212 Pavel: Pani učitelko, je to asi blbost, ale já si myslim, že nula je sudolichá, protože...	
213 Bořek: Pani učitelko, já si to myslím taky.	
214 Marek: Jo.	
215 Pavel: Protože to se dá rozdělit, to máš dva, to máš nula a nula, takže k tomu přidáš ještě nulu...	
216 Ondra: Mínus jedna je lichá. A mezi tím musí bejt nějaký sudý.	

217 Pavel: Ale je to i lichý.	
218 Uč.: Lenko.	
219 Lenka: Ale zase čísla musí bejt buď, jenom jedno, buď sudý, nebo lichý.	
220 Uč.: Je to pravda, že to musí být každý jenom jedno?	
221 Některé hlasy třídy (Andrea, Marek,...): Ne, nemusí.	
222 Petr: Nekonečno je taky sudolichý. (*Polohlasně. Směřuje zřejmě jen na souseda v lavici, ten odpovídá, jo a dále není rozumět)*	
223 Lenka: Ale pak by zase, pak by to nevycházelo ve všech těch číslech, že jednička, dvojka, dvojka je sudá, pak by to vůbec nevycházelo.	
224 Uč.: Pak by ti nevycházelo to na tý ose.	
225 Lenka: No.	
Šum třídy.	
226 Lenka: Pani učitelko, když máme nic, tak to můžeme rozdělit třeba na sto nic *(Θ),* a to jde rozdělit na milion kusů, takže ta *(Θ)* nula je sudá, protože ji můžeme rozdělit na dva kusy, na tři, na čtyři až na milion.	
227 Bořek: Takže je sudolichá.	
228 Uč.: Hm. Amálko.	
229 Amálka: Pani učitelko, tak jako, když mám, když si sečtu jako třeba šest plus šest, tak mi to dá dvanáct. Takže sudý plus sudý mi dá sudý. A nula plus nula. Kdyby nula byla sudá, tak mi to dá taky sudý, protože nula plus nula se rovná nula.	Jde k tabuli a zapisuje rovnici 6 + 6 = 12

Šum ve třídě. (Probíhají individuální diskuze mezi menšími skupinami spolužáků, kterým není rozumět. Ema na Amálku souhlasně reaguje: „no“.)	
230 Uč.: Takže proto si myslíš, že nula je sudá, protože vždycky, když sečteš dvě čísla a vyjde ti to sudý, *(Θ)* dvě stejný čísla v tomhle případě, jak jsi to říkala, *(Θ)* tak ti vyjde sudý, takže by i ta nula měla být sudá. *(Θ)* Co vy na to?	
231 Několik hlasů (Ema..): No.	
232 Uč.: Slyšeli jste ten názor Amálky?	
233 Ema a někdo další: Ano.	
234 Uč.: Matěji.	
235 Matěj: Já si myslím, že to jsou. Dovolíš? *(Bere si fix na interaktivní tabuli od Amálky*). *(Θ)* Jakoby, kdyby byly třeba dva vymyšlený paňáčci, který jakoby nejsou, který neexistujou, tak je nemůžeme rozdělit, protože jako neexistuje, anebo třeba *(Θ)...*	
236 Ondra: Ale pořád jsou to panáčci, který už jakoby jsou, když už je někdo nakreslí, tak už jsou.	
237 Matěj: Ale počkej, ale jakoby třeba viděls někde jakoby, jakoby třeba v matematice nebo tak, že jakoby nula se dá rozdělit? Já teda ne.	
238 Marek, Ema a další hlasy: Dá se rozdělit.	
239 Andrea: A kde to vidíte třeba v učebnici?	
240 Vojta: Nula děleno nulou je nula.	
241 Lenka: V učebnici to nemusí být, ale nula plus nula je nula...	
242 Marek: A vidíte tam, že nula se nedá rozdělit?	

243 Lenka: Takže je to sudý i lichý číslo, protože nula můžeš rozdělit i na třetiny.	
244 Andrea: Takže je to oboje.	
245 Lenka: No.	
246 Uč.: Šimone.	
Šum dohadujících hlasů, ve kterých se úplně ztrácí, co říká Šimon.	
247 Uč.: Pšt.	
248 Andrea: Já už jsem se hlásila dřív.	Zřejmě to říká někomu ve třídě.
249 Uč.: Andreo. Moment. Honzíku ještě jednou, protože Andrea do toho mluvila. Ještě jednou.	
250 Šimon: Jako nekonečno se taky nedá rozdělit na nekonečno a nekonečno.	
251 Petr: Dá, na *(zbytek není rozumět).*	
252 Ema: No.	
253 Matěj: Nedá.	
254 Šimon: Anebo třeba, když mám papír, to je jako nula, a ten papír chci rozdělit na, *(Θ)* jako na A-čtyřkovej papír. Na A-čtyřkovej papír a jako rozdělit ho na A-čtyřkovej papír, to nejde.	
255 Vojta: No, ale máš pořád, máš pořád...	
256 Ema: Fousy.	
257 Vojta: Dva stejný.	
258 Šimon: No.	
259 Andrea: Ano, ale z A-čtyřky udělat A-čtyřku, to neuděláš.	
Šum třídy.	
260 Andrea: No vidíš.	
Šum třídy.	
261 Uč.: Martino.	

262 Martina: Matěj říkal, že máš (*není jasně rozumět, zřejmě ale říká čtverec*), tak prostě, když mám třeba jako, tak říkal, že to neexistuje, tak tady mám jako, tady nemám nulu nebo prostě ehm jako, že nula je tohle, ne tohle, jako že to, ne, že to neexistuje. To je prostě tak, jako *(Θ)* no prostě, to je jak říkal, no prostě, to existuje.	Vyrobila z papíru čtverec a snaží se na něm ukazovat, co říká.
263 Matěj: Neexistuje.	
264 Uč.: Pavle.	
Šum třídy.	
265 Uč.: Počkej, musíš, až když tě všichni slyší.	
266 Pavel: Jo. Že nul je nekonečno, takže vlastně to jde popořadě. Jedna nula, dvě nuly, tři nuly, čtyři nuly, a to jsou jako čísla. Takže nula jedna je lichá a potom dvojka je sudá, takže *(odmlčí se.)*	
267 Uč.: Tomu nerozumim.	
268 Bořek: Ale nekonečno je, Pavle, otočená osmička.	
269 Pavel: Já vim, ale když je třeba, vezme se to, máme jednu nulu, potom máme dvě nuly, potom máme tři nuly, takže jednička je lichá, dvojka je sudá a trojka je taky lichá.	
270 Uč.: Takže ty když napíšeš tři nuly vedle sebe, tak bys řek, že to je lichá nula.	
271 Pavel: Ne, že to píšu za sebou. Jednu nulu, potom	
272 Bořek: Nula je lichosudá.	
273 Pavel: No, já si taky myslim, že je lichosudá.	
274 Uč.: Lenko.	

275 Lenka: Musí být, podle mě je lichosudá, protože nulu si můžeme rozdělit a můžeme ji rozdělit i na třetiny i na poloviny a jakoby *(Θ)* to *(ΘΘ).*	
276 Uč.: Šimone.	
277 Šimon: Já bych chtěl říct s tím papírem, to je jako, když říkal, že rozdělit nula děleno nula je nula, tak to je jako rozdělení A-čtyřkový papír na A-čtyřkový a A-čtyřkový papír. To máme jenom jeden. To nejde.	
278 Uč.: Takže jde udělat nula děleno nula?	
279 Šimon: Ne.	
280 Vojta: Ano.	
281 Andrea: Nejde.	
282 Bořek: Jde.	
283 Luboš: Jde.	
284 Ondra: Nula děleno nula je nula.	
285 Ema: No, dyť jo.	
286 Pavel: No právě a to jde.	
287 Bořek: Jo.	
288 Martina: Mohlo by to bejt...	
289 Andrea: Ano, protože se furt...	
290 Ondra: Pořád se to něco rovná.	
291 Bořek: Jo.	
292 Martina: Myslim, že to jde udělat.	
293 Andrea: Ale nula děleno nula je nic.	
294 Uč.: Nelo.	
295 Nela: Protože já, ale když...	
296 Andrea: Nic je ta nula.	
297 Uč.: Ale Andreo, promiň, ale ty se nikdy nepřihlásíš a neustále mluvíš.	
298 Andrea: Pani učitelko, já se tady celou dobu hlásim.	

299 Vojta: Nene.	
300 Uč.: Vždyť ty ale pořád celou dobu mluvíš.	
301 Ema: Jojo.	
302 Matěj: Jo pani učitelko, já jsem se hlásil dycky.	
303 Uč.: Nelo.	
304 Nela: Jako kdybysme ten, tu nulu, jako ten papír jako, nebo jako tam tu nulu vydělíme těma dvěma, to jsou jako dvě nuly, ale třeba menší nuly jako, že jako třeba jako s tím papírem, že to nejde rozdělit na A-čtyřkovej papír, ale na A-pětkovej, takže jako...	
305 Šimon: Ale nemůžeš z toho mít jen jeden, to je, jakoby si udělala jeden krát jedna, tak z toho jako nemáš celou jedničku nebo dvě.	
306 Uč.: Andreo.	
307 Andrea: Jako, že když uděláme, tu nula děleno nula je prostě nic, a to nic je ta nula.	
308 Ema: No.	
309 Andrea: Jak říkal Matěj. Prostě třeba, když si panáčka, nějakýho panáčka myslím ve v mysli, tak neexistuje prostě. My si ho jenom myslíme.	
310 Ema: Ale jak to?	
Šum třídy.	
311 Někdo: Ale existuje.	
Šum třídy.	
312 Vojta: Existuje, nula je číslo.	
Šum třídy.	
313 Uč.: Amálko.	

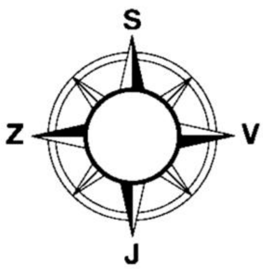
314 Amálka: Pani učitelko, ale jako nula existuje, protože může být vyrobená třeba z papíru a nejenom v naší mysli. Může bejt i třeba nakreslená.	
Šum třídy.	
315 Ondra: Je to stejný jako všechny ostatní čísla.	
316 Uč.: Marku.	
317 Marek: Pani učitelko, mě ještě furt bolí...	
318 Uč.: Jo, hnedka vyřešíme.	
319 Uč.: Lenka ještě.	
320 Lenka: Že nula, jak říkala Amálka, když nula plus nula je nula, tak to jde, protože *(Θ)* ta nula musí bejt lichosudá, protože když dáme dvě sudý č, dvě stejný sudý čísla, tak nám to dá sudý, ale zase nulu můžeme roztřetit, a to jedni, a to třeba jedničku ne...	
Šum třídy.	
321 Lenka: Ale trojku už zase můžeme roztřetit.	
322 Uč.: Ale já to teď uzavřu na tom, že jestli jsem vás dobře pochopila, co jste říkali, tak máme tady čtyři názory.	
323 Někdo: Tři.	
324 Uč.: Někteří si myslí, že nula je lichý číslo. Někteří...	
325 Někdo: Ne.	
326 Uč.: Nebo to už jste opustili?	
327 Někdo (možná Ema): Já ne.	

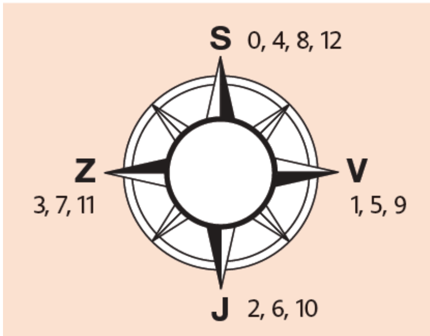
328 Uč.: Někdo, takže to je jeden názor. Nula je liché číslo. Další si myslí, že nula je prostě sudé číslo. Další, že nula není ani liché ani sudé číslo, že se to nedá určit. A pak čtvrtý názor, že nula je, váš termín, lichosudá, je to obojí. A mě by teďkon zajímalo, ke kterýmu názoru se teďkon kdo přiklání.	
329 Bořek: K poslednímu.	
330 Pavel: Lichosudý.	
331 Uč.: Takže každý se mi prosím přihlašte, ať vidíme, jak jsme na tom názorově.	
332 Uč.: Takže, kdo si myslí, že nula je lichá?	
333 Uč.: Hm, jeden hlas.	Hlásí se Šimon.
334 Uč.: Kdo si myslí, že nula je sudá?	
335 Ema: Já asi ne, já asi do toho nejdu.	
336 Uč.: Raz, dva, tři, čtyři. Pět hlasů.	Hlásí se Martina, Vojta, Nela, Amálka a Ondra.
337 Uč.: Kdo si myslí, že nula není lichá ani sudá?	
338 Uč.: Dva, hm.	Hlásí se Matěj a Andrea.
339 Uč.: A kdo si myslí, že je obojí, jak lichá, tak sudá..	
340 Bořek: Lichosudá.	
341 Uč.: Lichosudá.	
342 Uč.: Jedna, dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm. Je to tak?	Hlásí se Pavel, Bořek, Lenka, Ema, Petr, Luboš a Marek.
343 Uč.: Je někdo, kdo se nepřiklonil ani k jednomu názoru?	
344 Ondra: Klára.	
345 Uč.: Klára, protože tady neni.	

346 Uč.: Tak pojďte mi to ještě říct, ale já už vám musím dát svačinovou přestávku.	

9.2. Příloha 2: Protokol diskuze DII

Protokol zachycuje přibližně 15 minutový videozáznam, který byl pořízen v druhé třetině vyučovací hodiny. V jeho levém sloupci jsou opět přepisy vstupů jednotlivých žáků, učitelky a případně doplněny o poznámky týkající se intonace výpovědí. Další komentáře k dokreslení vizuální představy průběhu diskuze jsou pak v pravém sloupci.

001 Uč.: Nakreslete si takovoudle. Víte co to je?	Žáci mají před sebou otevřené učebnice (Hejný, Jirotková, Bomerová, 2010, s. 74) (viz dále vstup 015) a na interaktivní tabuli před sebou vidí následující obrázek. 
002 Bořek a další: Růžice.	
003 Uč.: Směrová růžice. Vy si takovou jednoduchou načrtněte. Jenom kříž. Nahoru si napište sever ...	Žáci zakreslují do bloků.
004 Andrea: Pani učitelko, to je v tom ehm oranžovým rámečku.	
005 Uč.: Ano. To je v tom oranžovém rámečku.	
006 Vojta: Já myslel, pani učitelko, že to děláte na vlastivědu.	
007 Uč.: Ne, nebude to na vlastivědu, ale z vlastivědy to znáte.	
008 Bořek: Musíme to znát z vlastivědy.	Otočí se a usměje se na paní učitelku.
009 Uč.: Musíte to znát z vlastivědy. Ano.	

010 Uč.: Takže směrová růžice nám ukazuje nahoře, co?	
011 Třída *(hlavně je slyšet Ema)*: Sever.	
012 Uč.: Dolu.	
013 Třída: Jih.	
014 Uč.: Pak východ. A západ. *(Třída vyjmenovává s učitelkou).*	Žáci, které je možné vidět v záběru, jsou skloněni nad svými bloky a zakreslují růžice.
015 Uč.: A já vám teď nechám chvíli, abyste si přečetli. Všichni vidíte v učebnici tu směrovou růžici?	Text a růžice v učebnici: Chodíme kolem růžice světových stran a píšeme čísla 0, 1, 2, 3, 4,... K severu **S** napíšeme 0, k východu **V** napíšeme 1, k jihu **J** napíšeme 2, k západu **Z** napíšeme 3, opět jsme u **S** a napíšeme 4, přejdeme k **V** a zapíšeme 5 a tak dále.  (Hejný, Jirotková, Bomerová, 2010, s. 74)
016 Třída: Ano.	Odpovídá jen pár hlasů, ostatní se ještě soustředí na zakreslování růžice.
017 Uč.: Tak abyste si přečetli v tom oranžovým rámečku, co je tam napsáno. Jestli to schválně pochopíte, co vám tam vysvětlují. A zkusíte to vysvětlit. Vy si to pročtěte. *(ΘΘ)* **Jestli pochopíte, co máte dělat.**	

018 Uč.: Bořku, pročítáš. Není potřeba mít tu růžici takhle promakanou.	
019 *Ve třídě je ticho, žáci pročítají (pauza 22 sekund).*	
020 Vojta: Jo, aha! *(radostná intonace)*	
021 Marek: Pani učitelko, já jsem na něco přišel.	Očním kontaktem a úsměvem dává učitelka Martinovi signál, že s ním jeho radost sdílí.
022 Vojta: Jo, tak to chápu.	
023 Andrea: Pani učitelko, to chápu.	Hlásí se většina žáků ve třídě.
024 Uč.: Tak Šimon se hlásil jako první. Každý si to stihl pročíst?	
025 Třída: Ano.	
026 Uč.: Holky, vepředu? Natálko s Eliškou?	Učitelka si všimne Kláry a Amálky, že mají stále ještě hlavy skloněné nad bloky a Klára něco urputně gumuje.
027 Klára: Ještě ne *(odpovídá téměř neslyšně)*.	
028 Uč.: *(ΘΘ)* **Kdo už porozuměl, tak si může začít** *(Θ) (polohlasná výzva).*	Výzva je adresována spíše Kláře než třídě.
029 Uč.: Tak Šimone, řekni, cos tam pochopil. Co si myslíš, že se s tím dělá.	Klára ukončila v práci v bloku, narovnala se a otočila na učitelku.
030 Šimon: Že tam jsou vždycky, na každej stranách jsou, aspoň u severu a u toho u východu, že se tam jako násobí čtyřma. A u západu *(odmlčí se)*.	
031 Uč.: No, takže nejdřív, jak tam dosazujeme ty čísla v tý směrový růžici. Pochopili jste to? Bořku?	Bořek vyvolán, ač se nehlásil.
032 Bořek: Hm *(přikyvuje, že pochopil)*.	
033 Uč.: Jak to tam funguje?	

034 Bořek: Jakoby, že furt dáváme ty čísla kolem jakoby tý ...	
035 Uč.: Pojď to ukázat na tu tabuli.	
036 Bořek: Tý osy růžice, když se to jakoby jako takhle, že tady S je jednička ...	Na sever zapíše jedničku a k východu začíná psát dvojku.
037 Několik hlasů ve třídě *(znatelná Andrea)*: Nene, nula. Nula.	Třída upozorňuje Bořka na chybu.
038 Bořek: Jo, teda nula.	Bořek ihned smazává, co napsal.
039 Bořek: 0, 1 ...	Znovu zapisuje čísla od severu, nyní od nuly.
040 Ondra: Pani učitelko, já v tom něco našel.	
041 Bořek: Já taky.	
042 Marek: A já už vim, proč to tak funguje.	
043 Ondra: Já taky.	
044 Bořek: Takhle se jede pořád dokola jakoby.	U tabule zapisuje čísla 0, 1, 2, 3 po směru hodinových ručiček k vrcholům směrové růžice.
045 Uč.: Tak zkus jet ještě kousíček.	
046 *Bořek doplňuje čísla až po 5 u východu. Pak je učitelkou vyzván Pavel, aby pokračoval. Ten doplní čísla až po jedenáctku na západě. Dále pokračuje Klára opět až k západu, kde končí číslem 15. Po celou dobu je v záběru vidět ruka Ondry, který se urputně hlásí, že něco objevil. Po návratu od tabule se hlásí i Pavel a poté je vidět i hlásící se Amálka. Zřejmě se hlásí i několik dalších žáků, kteří jsou však mimo záběr kamery.*	
047 Uč.: Tak a já to teďka stopnu. Všichni jste pochopili ten princip?	Hlásí se čím dál více žáků, kteří se chtějí podělit o své objevy.
048 Hlasy třídy: Jo. /Já jo.	
049 Klára: Já jsem tam ještě na něco přišla.	Upozorňuje při odchodu od tabule, kde doplňovala čísla ke směrové růžici.

050 Svůj objev hlásí i ještě někteří další žáci *(nerozlišitelné přesně kdo a co říká).*	
051 Uč.: Ještě si v tom něco objevila? Tak já dám ale nejdřív slovo Pavlovi, Pavle.	
052 Pavel: Že tam jsou, že já tam vidim ty, že tam, že *(zvedá se a jde k tabuli to ukázat)*, že v esku *(na severu)* tady jsou všechny sudý čísla, nula, čtyři, osm, dvanáct. Tady jsou všechny lichý čísla *(ukazuje na východ)*, tady jsou taky sudý *(ukazuje na jih)* a tady jsou lichý *(ukazuje na západ)*.	
053 Uč.: Hm. Kdo si tohodle všiml?	
054 Andrea: Já ano.	
055 Ondra: Já ne, ale hlásím se už na něco dalšího.	
056 Uč.: Supr. Pavle, posaď se. Marku, co ty jsi objevil?	
057 Marek: Já?	Žák, který je v protokolu uváděn jako Marek, má ve skutečnosti jméno, které se ve třídě objevuje třikrát. Ujišťuje se tedy, jestli má učitelka na mysli jeho a ne jednoho z jeho spolužáků?
058 Uč.: Hm.	
059 Marek: Já jsem objevil i to, že to jde po čtyřech, protože tu jsou čtyři ty strany.	
060 Uč.: A co jde po čtyřech, Marku?	
061 Marek: Tady ty čísla jdou jako takhle po jednom.	Ukazuje kolem dokola směrové růžice.
062 Ondra: Protože máš sedm a přičteš čtyři.	

063 Marek: A potom vždycky tady jdou po čtyřech *(ukazuje k severu*), protože tady je jedna, druhá, třetí, čtvrtá *(ukazuje k vrcholům růžice)*.	
064 Uč.: A všude to tak funguje, Martine? Na všech těch stranách?	
065 Několik hlasů včetně Marka: Jo.	
066 Ondra: Jo. Úplně všude.	
067 Uč.: Že se tedy ty čísla zvyšují o čtyři? Jo?	
068 Bořek: Ne.	Bořek nesouhlasí, ale na jeho ne nikdo nereaguje.
069 Klára: Pani učitelko, já mám ještě něco.	
070 Ondra: Já to mám až do dvacítky.	
071 Uč.: Kláro.	
072 Klára: Kdyby tady bylo ještě ten severovýchod, tady ten jihovýchod a tak dále, tak by to nebylo po čtyřech. To by bylo potom po osmi.	
073 Uč.: Hm. Ještě jste si něčeho všimli?	
074 *Nikdo nereaguje. Ve třídě je ticho.*	
075 Uč.: Dokázali byste mi teď říct, kde bude číslo dvacet?	
076 Vojta: Jo u severu.	
077 Bořek: Počkat.	
078 Ostatní mlčí.	Bořek v záběru kamery si prstem ve vzduchu ukazuje okolo směrové růžice na tabuli.
079 Vojta: Ne vlastně.	

080 Tichý šum. (ΘΘ)	Každý sám odpočítává, přemýšlí.
081 Vojta: Jo aha, já na něco přišel.	
082 Uč.: Vojto.	
083 Andrea: Číslo třicet, pani učitelko?	
084 Někdo: Dvacet.	
085 Vojta: Že. Že to tady je jako. Že se tady to *(ukazuje na sever)* počítá jakoby od nuly a že se to čtyřikrát vyjede takhlenc *(ukazuje na čísla, od nuly směrem k dvanáctce, vypsaná na severu)*. Že tady je nula, tady je čtyřka...	
086 Ondra: Pani učitelko, od dvacítky už to nefunguje.	
087 Andrea: Funguje.	
088 Uč.: Vojto, já jsem tě teď moc neslyšela. Ještě jednou.	
089 Vojta: Že tady je to takhle docela, protože ehm tam se odpočítává nula, čtyři, osm, a to je teda základní vlastně násobilka čtyř.	
090 Uč.: Hm.	
091 Vojta: A potom todlencto tím pádem bude *(Θ)* *(ukazuje na východ)* ...	
092 Ondra: Násobilka jedný?	
093 Vojta: *(Θ)* To nebude asi žádná násobilka, nebo já nevim, protože jedna, pět, devět, to neni vůbec žádná násobilka.	

094 Ondra: Násobilka jedný.	
095 Vojta: A tady to zase *(ukazuje na jih)* 2, 6, to bude *(Θ)* zase *(Θ)* to o ty čtyři. Ale že tadyhle *(ukazuje znovu na sever)* jsou vždycky ty nuly, protože to začíná nulou. Tadyhle *(ukazuje na východ)* jsou vždycky ty jedničky na začátku a i na konci, no vlastně i na konci. Tadyhle *(ukazuje na jih)* jsou dycky ty dvojky na konci. A tadyhle *(ukazuje na západ)*. Teda dycky nemůžou bejt nikde jinde *(ukazuje na celou růžici)* ty jednič ehm *(opraví se)* dvojky na konci tadyhle *(ukazuje na východ)* můžou bejt zase jenom tadyhle můžou bejt jedničky na konci. A tadyhle *(ukazuje na západ)* zase můžou bejt jenom trojky na konci.	
096 Uč.: Rozumíte Vojtovi?	
097 Ema a další hlasy: Ne.	
098 Andrea: Ne, vždyť tamhle je třináctka.	
099 Vojta. No jo, ale. Kde?	
100 Andrea a ostatní hlasy: Tamhle. Na východě.	
101 Vojta: No ale tak u těhle těch *(ukazuje na východ)* můžou bejt jenom lichý čísla na konci. A u těhle těch *(ukazuje na jih)* sudý.	
102 Andrea: Ale ty jsi řikal, že tamhle musej bejt jenom jedničky na konci.	
103 Vojta: Jak jako? Já neříkal, že jenom jedničky.	

104 Andrea: Řikal.	
105 Vojta: Že můžou bejt jenom *(slovo jenom zdůrazní)* jedničky.	
106 Marek: Pani učitelko.	
107 Andrea: Ale tys to řikal.	
108 Uč.: Tak Marku.	
109 Marek: Pani učitelko, jak jsme se jednou, furt si řikali, jestli je nula lichá nebo sudá, tak teď jsme zjistili, že patří mezi ty sudý.	Chvátá k tabuli.
110 Uč.: Co vy na to?	
111 Ondra: Jo.	
112 Další hlasy: Ano.	
113 Bořek: Ne.	Pohledem se otáčí na učitelku a čeká na její podporu.
114 Ema: Ježiš, proč ne? Vždyť tamhle jsou všechny sudý *(velmi rozčílená intonace).*	
115 Bořek: Je sudolichá.	
116 Vojta: Je sudá.	
117 Ondra: Neni sudolichá *(rozčílen).*	
118 Lenka: Sudá.	
Šum rozhořčené třídy.	
119 Ema: Je sudá.	
120 Luboš: Jo, vždyť to můžeš rozdělit na nula a nula.	
121 Šimon: Kdyby tam bylo pět těch, těch, těch ...	Myslí pět šipek ve směrové růžici namísto nynějších čtyř.
122 Vojta: Sudolichá, to nemůže bejt žádný číslo. To *(není rozumět)* neexistuje.	
123 Bořek: Je.	

Šum třídy.	
124 Nela: I kdyby byla, tak tam stejně patří, protože tam máš to sudo.	
Šum třídy.	Bořek krčí rameny.
125 Uč.: Marku, moc ti děkuju za pěkný postřeh.	Marek odchází od tabule.
126 Bořek: Ale že teďkon, pani učitelko, patří jakoby do tadytý, ale jinak je obojí.	Bořek svůj pohled stáčí ze třídy opět na učitelku. Čeká na reakci učitelky.
127 Vojta: Nene, je jen sudá.	
128 Ema: Jak to, že obojí?	
129 Další hlasy: Je sudá.	
130 Ondra: Ale to by v ní muselo bejt víc čísel než jenom nula *(rozčílen).*	
131 Pavel: No právě.	
132 Ema: No dyť.	
133 Vojta: Protože vždycky na konci, když píšeš deset, tak je tam nula, když píšeš dvacet, tak je tam taky nula, a všechno je to sudý.	
134 Ondra: Jo a desítka je sudá, dvacítka je sudá, třicítka je sudá.	
135 Pavel: Dvanáctka.	
Šum třídy.	
136 Uč.: Šimone.	
137 Bořek: Ale nula je úplně jiný číslo, chápeš?	
138 Šimon: Ale zase kdyby tam bylo...	
139 Někdo: Neni.	Zřejmě reakce na 137.
140 Ema: Je.	
141 Uč.: Hele, moment, Šimon má slovo.	

142 Šimon: Zase, kdyby tam bylo, pani učitelko, jako pět těch, jako těch šipek, nebo jak se tomu říká, tak by tam zase byla pětka. Pak by to bylo zase lichý.	Navazuje na to, co se snažil říci již ve 121.
143 Uč. Hm. Co vy na to?	
144 *Ticho (Θ).*	
145 Andrea: Pani učitelko.	
146 Uč.: Honzo, jak jsi to myslel?	
147 Šimon: Jako, že kdyby to bylo jako, kdyby se ještě přidělala jako ještě ta jedna ta jako *(odmlčí se).*	
148 Uč.: Pojď to kdyžtak nakreslit tady na tabuli.	
149 Marek: Pani učitelko.	
150 Vojta: Jo, kdyby se tam přiděla ta jedna.	„Jo“ zní intonačně jako aha, už jsem pochopil, co se, Honzo, snažíš říct.
151 Šimon: Tady kdyby se třeba tady udělala nějaká ta velká, že jo. Tak kdybysme to počítali, bylo by jich pět, tak tady by byla pětka zase *(ukazuje na sever)*.	Přikresluje k růžici další špičku ve směru na severovýchod.
152 Uč.: A bylo by tam vždycky jenom pětka?	
153 Vojta: Ale pak by se to střídalo, pak by tam byla zase sudá.	
154 Šimon: Pak by tam bylo, pani učitelko, deset, pak patnáct, pak dvacet.	Nic nepíše, o číslech jen mluví.
155 Uč.: Hm. Hm.	
156 Vojta: Takže je ta nula sudá, protože tam se střídá sudá, lichá, sudá, lichá, že jo. Takže je to furt sudý.	
157 Marek: Pani učitelko.	
158 Uč.: Hm. Pěkný.	

159 Vojta: Takže to jenom potvrzuje.	Šimon na tabuli maže šipku na severovýchodě a odchází si sednut, aniž by se k tomu nějak dále vyjadřoval.
160 Ema: To je pravda.	
161 Uč.: Marku.	
162 Marek: Pani učitelko, ale zase Bořek měl pravdu, že to může bejt sudolichý, jak jsem teďkon zjistil podle mých výpočtů. Protože kdybysme šli po pěti, tak to bude nula, pět, deset...	Čísla zapisuje stranou na tabuli.
163 Vojta: A co je deset? To je sudý.	
164 Ema: No právě.	
165 Marek No právě, proto to je sudolichý i.	
166 Ema: Protože tam máš, ale ta nula, ta pětka je lichá, a předtím je ta nula sudá.	
167 Marek: Hm. Je to podle mě takový, no...	Začíná váhat.
168 Bořek: Obojí.	
169 Marek: No, to máš zase pravdu *(ukazuje na Emu)*. *(Θ)* No, to máme, to máš zase pravdu, ehm že, že začíná tou sudou, má bejt. *(Θ)*	
170 Uč.: Takže Marku, co si myslíš, je to sudá nebo lichá?	
171 Marek: Sudá.	Šťastně hopsá od tabule.
172 Uč.: Lenko?	
173 Lenka: Že nula je určitě sudá, protože, když si dáme třeba tři krát čtyři, tak to nám vyjde dvanáct. A třeba, když si dáme jedna krát nula, tak to máme nula.	

174 Bořek: A jak jako, když půjdeme po jedný?	
175 *Ticho.(Θ)*	
176 Uč.: Vojto.	
177 Vojta: Ale nula je určitě...	
178 Někdo: Sudá.	
179 Vojta: Sudá, protože, protože ehm, když si přičtem k nule dvojku, což je sudý, tak je to dvojka, a to je taky sudý, takže to musí bejt, protože ehm kdyby se přičetlo...	Ze záběru je patrné, že Vojta zaregistroval Míšino použití kategorie multiplikativní struktury (173), ale obsahu jejích slov nevěnuje pozornost, protože jeho samotného něco napadlo. Soustředí se především na to, aby byl co nejdříve vyvolán a mohl své myšlenky sdělit ostatním. Naléhavost toho, co je připraven sdělit, zdůrazňuje nejen usilovným hlášením, ale i postavením se v lavici až skoro na špičky a, aby byl lépe vidět.
180 Ondra: Když sečtem dvě sudý, tak nám vyjde sudá.	
181 Vojta: No.	
182 Ema: No právě.	
183 Nela: A když sečtu dvě lichý, tak mi taky vyjde sudý.	
184 Vojta: No jo ale....	
185 Ondra: Jo, ale dvojka neni lichá.	
186 Pavel: Dvojka, dvojka je sudá *(tichá, nejistá intonace)*.	
187 Vojta: Dvojka je sudá.	
188 Pavel: Pani učitelko, já mám nápad.	
189 Bořek: Ale jednička je lichá.	
190 Vojta: Když máš pět a pět, tak to jsou lichý a lichý... *(zbytek není rozumět).*	

191 Ondra: No jo, ale nula plus jedna je pořád jedna, což vyjde lichý.	
192 *Nela něco v pozadí říká, ale není ji rozumět.*	
193 Vojta: No, dobře, akorát že ...	Reaguje na Nelu 192 a otáčí se na ni.
194 Luboš: Nelo, jednička je taky lichá, a když sečtu jedna plus jedna, je dva, a to je sudý.	
195 Nela: No, dyť jo.	
196 Vojta: A když sečteš..	
197 *Šum třídy.*	Andrea skáče, jak se vehementně hlásí.
198 Vojta: Protože jenom sudý a sudý může bejt to, a když to sečtu s pětkou, nula a pět, tak to je pět, takže sudý a lichý je vždycky lichý číslo, což je jedinej součet.	Během svého výkladu popojde až před tabuli, kde svou myšlenku dokončí, a opět se vrátí do lavice.
199 Pavel: Pani učitelko.	
200 *Šum třídy.*	
201 Uč.: Ondro.	
202 Ondra: Že já mám ještě podporu na to, že je to sudý. Protože vždycky když počítám, můžu počítat třeba do miliardy, a pořád se mi střídá, sudý, lichý. Že mám nula, jedna, dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm, devět, deset a takhle se mi to pořád střídá pořád. Po desítce je jedenáctka, a ta je zase lichá.	Během vyjmenovávání čísel sleduje směrovou růžici.
203 Vojta: Ale může tam bejt výjimka, ale *(dále není rozumět)*.	
204 Ondra Ale výjimka tam neni.	
205 Vojta: Já vim, protože jenom sudý a ...	Myšlenku dokončuje na 207.

206 Ondra: Takže to musí být sudý.	
207 Vojta: Sudý a sudý, může bejt sudý číslo nebo lichý a lichý může bejt sudý číslo. Ale sudý a lichý nemůže bejt sudý číslo, ehm takže musí bejt ta nula sudá, protože nula a pět je pět, takže to je to jakoby lichý číslo, což je vždycky, když sečtu sudý a lichý, vznikne, a když sečtu lichý a lichý, tak ne. A když udělám sudý a sudý, takže nula a *(Θ)* šest, tak to je šest.	
208 Ema: Takže je to sudý.	
209 Uč.: Pavle.	
210 Pavel: Že, pani učitelko, kdybysme to počítali od todlenctoho, takhle nula, jedna dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm, devět, deset, jedenáct, dvanáct, třináct, čtrnáct, patnáct, šestnáct.	Stojí u tabule a při vyjmenovávání čísel pohybuje prstem kolem růžice po směru hodinových ručiček. Čísla však přiřazuje i k malým vrcholům na severovýchodu, jihovýchodu, jihozápadu, a severo-západu. Jednotlivá čísla jmenuje v poměrně rychlém sledu za sebou, ale čísla 0, 8 a 16 intonačně zdůrazní.
211 Bořek: Tak to zase vyjde.	
212 Pavel: A jo. Já jsem se splet.	
213 Uč.: Hm. Ale přesto fajn, žes to ukázal.	

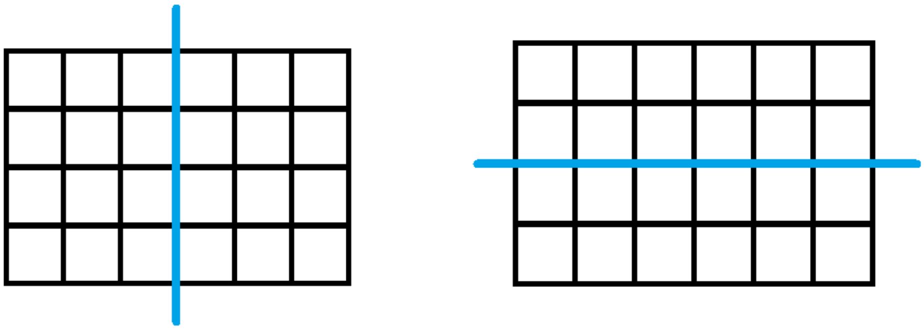
9.3. Příloha 3: Objevení pravidla pro určování sudosti a lichosti čísla ve 2. ročníku

Neanalyzovaný výňatek z pedagogického deníku z **ledna 2010:**

POLOVINA NA MODELU ČOKOLÁDY

1. úkol

Žáci měli hledat různé způsoby, jak rozdělit čokoládu (6 x 4) spravedlivě mezi dva kamarády, tedy rozdělit na polovinu. Ihned přišli na řešení svislého a vodorovného řezu (viz obr. A).



obr. A

Tato dvě řešení žáci původně brali jako konečná. Zprvu si totiž pod pojmem polovina představovali nejen stejný obsah (v případě čokolády stejný počet jejích dílků), ale i stejný tvar těchto částí. Model čokolády ale umožnil, rozšířit jejich představu nalámáním celé tabulky čokolády na jednotlivé dílky, a ty pak po jedné rozdělovat na dvě hromádky.

Žáci přišli na to, že aby rozdělení uvedené čokolády bylo spravedlivé, musí být na každé hromádce 12 dílků. Na základě tohoto zjištění žáci začali znovu v původní čokoládě hledat, jak by šla ještě jinak spravedlivě rozlomit na dvě části.

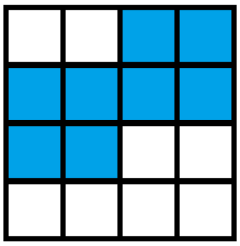
V současné chvíli mi ani tak nešlo o to, aby našli všechna možná řešení, ale aby si uvědomili i jiné možnosti dělení čokolády než jen svisle a vodorovně. A aby v modelu čokolády sledovali nejen její obdélníkový tvar, ale i počet dílků, kterému zprvu nevěnovali pozornost. Důležitý není tvar poloviny, ale její obsah.

2. úkol

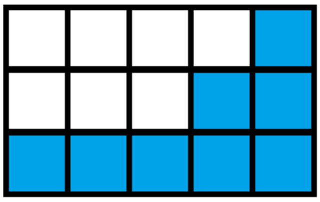
Každá dvojice dostala jeden model čokolády různých velikostí a společně hledali způsoby, jak by si jí mohli spravedlivě mezi sebe rozdělit.

3. úkol

Během jejich samostatné práce ve dvojicích jsem na tabuli nakreslila několik čokolád, které jsem rozdělila na dvě části. Žáci posléze hodnotili, zda jsem v konkrétním případě byla spravedlivá. U obrázku B jsem se přímo ptala, jestli je to spravedlivé, když každý dostane jiný tvar čokolády i jiný počet kusů (bílá ze dvou kusů, modrá z jednoho kusu). Teď už ale nikdo o spravedlnosti tohoto dělení nezapochyboval.



Doposud žáci pracovali jen s modely se sudým počtem dílků. Mezi nakreslené modely na tabuli jsem ale zařadila i čokoládu o lichém počtu dílků a rozdělila ji (viz obr. C). Spočítáním dílků bylo žákům jasné, že to spravedlivé není. Byli tedy vyzváni, aby mé řešení jako u předchozích chybných opravili. Bořek se to došel pokusit udělat za doprovodu rad několika spolužáků z lavic tak, že ubral z jedné části jeden dílek a přidal ho k druhé. Zjistil ale, že mu to opět nevychází spravedlivě. Chvíli váhal a pak se pokusil řez vést úplně jinudy. Opět mu to nevyšlo. Několik žáků z lavice se mu snažilo poradit, jak by to měl zkusit jinak, ale to už do toho vstoupil Šimon.



obr. C

1 Šimon: To nejde. To je lichý.

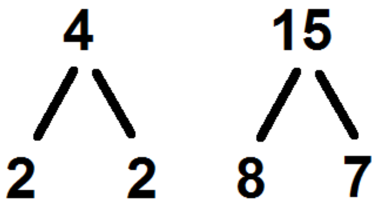
2 Uč.: A co to znamená, že je lichý?

3 Šimon: Že ho nemůžeme rozdělit na třeba 7 a 7.

4 Lenka: Sudá jdou rozdělit na dvě čísla, lichá ne. Když se rozděluje liché číslo, tak vždy je jedno o 1 menší. *(U sudých čísel má na mysli rozdělování na dvě stejná čísla.)*

5 Šimon: Sudá na stejná čísla, stejně velká, ale lichá čísla ne.

Znázornění na tabuli (obr. D), které udělal někdo z žáků (nevím už přesně kdo), mělo ilustrovat to, co řekla Lenka (4) a Šimon (5).)



obr. D

Seznam obrázků